**NURJATI JOURNAL OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL SCIENCES**
Publikasi Online : Desember 2020
Volume 1, Nomor1, 2020. Hal. 58 – 65
Journal homepage: **www.syekhnurjati.ac.id/jurnal/index.php/njmms** p-issn: xxxxxx
email: **njmms@syekhnurjati.ac.id** e-issn: xxxxxx

# ISOMORFISMA RUANG VEKTOR

**Silvia Khoirunnisa**
Tadris Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, IAIN Syekh Nurjati Cirebon
Jl. Perjuangan, Sunyaragi, Kec. Kesambi, Kota Cirebon, Jawa Barat 45132
Email : silviakh498@gmail.com

## Abstrak

Pada artikel ini, penulis mengkaji isomorfisma suatu ruang vektor. Ada beberapa tahapan yang harus dilakukan untuk menunjukkan isomorfisma suatu ruang vektor, diantaranya ialah dengan menunjukkan bahwa $f$ merupakan suatu pemetaan, kemudian menunjukkan bahwa $f$ suatu pemetaan linear, dan yang terakhir ialah menunjukkan bahwa f merupakan pemataan linear satu-satu dan pada. Melalui berbagai tahapan tersebut dapat kita ketahui bahwa dua buah ruang vektor $V$ dikatakan isomorfis apabila terdapat pemetaan yang bijektif, selain itu dua buah ruang vektor $V$ juga dikatakan isomorfis jika dan hanya jika mempunyai dimensi yang sama.

**Kata Kunci**: Pemetaan, Grup, Ruang Vektor, Isomorfisma, Aljabar Lie, $GL(V)$.

## 1. PENDAHULUAN

Salah satu cabang ilmu matematika yang terus mengalami perkembangan ialah struktur aljabar. Salah satu penyebab utama yang membuat perkembangan struktur aljabar sangat pesat, yaitu karena manfaat dari mengkaji hubungan ataupun struktur yang terbentuk di dalam sturktur aljabar tidak saja bermanfaat untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan aljabar biasa. Namun, dengan konsep yang disajikan oleh stuktur aljabar ini terbukti mampu menyelesaikan berbagai permasalahan yang tidak bisa diselesaikan oleh konsep aljabar biasa (Faizah, 2019).

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi oleh satu operasi biner dan minimal satu aksioma (Arifin, 2000). Struktur aljabar dengan satu himpunan diantaranya ialah grup dan gelanggang. Perbedaan antara grup dan gelanggang ialah terlihat pada operasi biner yang mengikatnya. Hal ini diuraikan oleh Arifin (2000) dalam bukunya, ia menggambarkan bahwa grup merupakan stuktur aljabar dengan satu operasi biner. Sementara itu, gelanggang ialah stuktur aljabar dengan dua operasi biner (Fraleigh, 1999). Kemudian, terdapat pula stuktur aljabar dengan dua himpunan diantaranya ialah ruang vektor, modul, dan aljabar.

Sebelum berbicara lebih lanjut mengenai himpunan ruang vektor yang saling isomorfis, kita akan mengenali struktur aljabar mulai dari struktur aljabar dengan satu operasi biner, yaitu grup dan stuktur aljabar dengan dua operasi biner yaitu ruang vektor dan aljabar. Setelah itu, baru kita bisa mengetahui bahwa terdapat aljabar lie yang beranggotakan himpunan ruang vektor yang saling isomorfis yang merupakan sebuah grup.

**Definisi 1.1 (Grup)** *Suatu struktur $(G,*)$ disebut grup apabila memenuhi aksioma berikut.*

*(i) Operasi $*$ pada $G$ bersifat asosiatif:*
*Untuk setiap $x, y, z \in G$ berlaku sifat $(x * y) * z = x * (y * z) = x * (y * z)$.*

*(ii) Adanya unsur identitas pada $G$, ditulis: $e$:*
*Untuk setiap $x \in G$ ada $e \in G$ berlaku sifat $x * e = e * x = x$*

*(iii) Setiap anggota . $G$ memiliki invers:*
*Untuk setiap $x \in G$ ada $a \in G$ invers $x$ sehingga berlaku $x * e = e * x = x$.*

Sementara itu, apabila ada operasi pada suatu grup yang bersifat komutatif akan mengakibatkan grup tersebut disebut grup komutatif atau grup abelian. Sementara itu, apabila ada operasi pada suatu grup yang bersifat komutatif akan mengakibatkan grup tersebut disebut grup komutatif atau grup abelian.

**Contoh 1.2** Himpunan $\mathbb{R}^2$ yang didefinisikan sebagai $\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\right\}$ terhadap operasi penjumlahan $(\mathbb{R}^2, +)$ merupakan suatu grup abelian.

Untuk menunjukkan $(\mathbb{R}^2, +)$ adalah suatu grup, kita harus memastikan terlebih dahulu bahwa operasi penjumlahan di $\mathbb{R}^2$ terdefinisi dengan baik. Adapun untuk membuktikan bahwa operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}^2$ terdefinisi dengan baik, akan ditunjukkan bahwa operasinya itu unik dan tertutup.

Ambil $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^2$ dan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ dengan $v_1 = v_2, v_3 = v_4$ dan $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Selanjutnya, dapat kita peroleh bahwa $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, dikarenakan $v_1 = v_2, v_3 = v_4$ sehingga didapat

$$\begin{aligned} v_1 + v_3 &= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ &= v_2 + v_4 \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\right\}$ unik.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}^2$ tertutup, ambil sebarang $\mathbb{R}^2$ dan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sehingga kita peroleh bahwa $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$. Kita tahu bahwa $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ sehingga $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ juga merupakan anggota dari $\mathbb{R}$. Selain itu, kita juga tahu bahawa $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sehingga dapat kita ketahui pula bahwa $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\right\}$ tertutup.

Kemudian, untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan suatu grup tentu tidak cukup dengan menunjukkan bahwa operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}^2$ terdefinisi dengan baik. Akan tetapi, harus dibuktikan juga sifat-sifat grup pada Error! Reference source not found. bahwa $\mathbb{R}^2$ memenuhi sifat assosiatif, terdapat unsur identitas, dan juga setiap unsur di $\mathbb{R}^2$ mempunyai invers. Selain itu, karena $\mathbb{R}^2$ merupakan suatu grup abelian sehingga $\mathbb{R}^2$ juga memenuhi sifat komutatif.

Pertama akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\mathbb{R}^2 = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R}\right\}$ memenuhi sifat assosiatif. Ambil sebarang unsur $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dan $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ dengan operasi penjumlahan. Dikarenakan memeuhi sifat assosiatif dan komutatif penjumlahan, diperoleh

$$
\begin{aligned}
(v_1 + v_2) + v_3 &= \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ y_2 + y_3 \end{pmatrix}\right) \\
&= v_1 + (v_2 + v_3)
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ dan dengan demikian pada $\mathbb{R}^2$ berlaku sifat asosiatif.

Selanjutnya untuk menunjukkan bahwa pada $\mathbb{R}^2$ terdapat unsur identitas, ambil $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dan $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. Berdasarkan hipotesis, ada $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ y_1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Jadi, untuk setiap $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dan $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ terdapat unsur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sebagai unsur identitas.

Kemudian yang harus kita lakukan untuk menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ adalah suatu grup, yaitu dengan menunjukkan bahwa setiap unsur di $\mathbb{R}^2$ mempunyai invers. Ambil $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dan $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$. Sudah kita ketahui bahwa ada $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sehingga $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Berdasarkan hipotesis ada $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ yang mengakibatkan $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 \\ y_1 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pembuktian terakhir ialah dengan menunjukkan bahwa $\mathbb{R}^2$ memenuhi sifat komutatif. Ambil $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ dan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Selanjutnya, dikarenakan memeuhi sifat komutatif penjumlahan dapat kita peroleh bahwa $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_1 \\ y_2 + y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = v_2 + v_1$.

Dari semua uraian di atas dapat kita ketahui, bahwa semua sifat grup yang ada pada Error! Reference source not found. berlaku pula pada $\mathbb{R}^2$. Jadi, terbukti bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan grup abelian.

Selanjutnya, secara singkat ruang vektor diartikan sebagai suatu himpunan tidak kosong $V$ atas lapangan F dengan dua operasi biner yaitu + dan $\circ$ dimana $(V, +)$ grup abelian dan terdapat pemetaan $\circ : F \times V \to V$ yang memenuhi aksioma-aksioma dari ruang vektor (Lestari , 2012).

**Definisi 1.3 (Ruang Vektor)** *Misalkan $F$ merupakan suatu lapangan, anggotanya disebut skalar. Suatu ruang vektor $V$ atas lapangan $F$ adalah himpunan tidak kosong $V$ yang anggotanya disebut vektor dan dilengkapi dengan dua buah operasi. Operasi pertama disebut penjumlahan dan diinotasikan $+$, mengoperasikan setiap pasang vektor $(u, v)$ pada $V$ ke suatu vektor $u + v$ pada $V$. Operasi kedua, disebut sebagai perkalian skalar, mengoperasikan setiap pasang $(r, u) \in F \times V$ ke suatu vektor $ru$ di $V$. Lebih lanjut, beberapa sifat berikut harus dipenuhi:*

*(i) Sifat asosiatif penjumlahan, untuk semua $u, v, w \in V$ berlaku $u + (v + w) = (u + v) + w$*
*(ii) Sifat komutatif penjumlahan, untuk semua $u, v \in V$ berlaku $u + v = v + u$*
*(iii) Keberadaan vektor nol, terdapat $0 \in V$ sehingga berlaku $0 + u = u + 0 = u, \forall u \in V$*
*(iv) Keberadaan vektor invers terhadap penjumlahan, untuk semua $u \in V$ terdapat suatu vektor di $V$, dinotasikan dengan $-u$ dengan sifat $u + (-u) = (-u) + u = 0$.*
*(v) Sifat perkalian skalar, untuk semua $a, b \in F$ dan semua $u, v \in V$.*

$$a(u + v) = au + av$$
$$(a + b)u = au + bu$$
$$(ab)u = a(bu)$$

$$1u = u$$

**Definisi 1.4 (Kombinasi Linear)** *Diketahui $V$ ruang vektor atas lapangan $F$, dan $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$. Himpunan semua kombinasi linear dari $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dinotasikan dengan $[A]$ dan didefinisikan sebagai $[A] = \{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2, \cdots, \alpha_n v_n | \alpha_i \in F, v_i \in A\}$.*

**Definisi 1.5 (Himpunan Bebas Linear)** *Diketahui $V$ ruang vektor atas lapangan $F$. Himpunan $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subseteq V$ disebut bebas linear apabila dipenuhi implikasi*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0_v \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_F$$

**Definisi 1.6 (Basis Ruang Vektor)** *Himpunan vektor $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ pada suatu ruang vektor $V$ disebut basis untuk $V$ jika $v_1, v_2, \cdots, v_n$ bebas linear dan membangun $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} = V$*

**Contoh 1.7** Vektor-vektor $\left\{\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ dalam $\mathbb{R}^2$ merupakan basis untuk $\mathrm{R}^2$.

Berdasarkan **Definisi 1.6**, suatu himpunan runag vektor dikatakan basis apabila ia merupakan himpunan bebas linear dan membangun $\mathbb{R}^2$. Oleh karena itu, akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\left\{\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \in \mathbb{R}^2$ membangun $\mathbb{R}^2$. Ambil sebarang $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2$ dengan $x, y \in R$. Berdasarkan **Definisi 1.5**, diperoleh $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Kita tahu bahwa $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dan $\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Dengan demikian, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Dengan menggunakan sifat distributif, diperoleh $\begin{pmatrix}\alpha_1 1\\\alpha_1 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2 1\\\alpha_2 1\end{pmatrix}$. Mengingat $\alpha_1 0 = 0$ sehingga diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut $\begin{pmatrix}\alpha_1 + \alpha_2\\\alpha_2\end{pmatrix}$. Kemudian, didapat bahwa $x = \alpha_1 + \alpha_2$ dan $y = \alpha_2$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan $y = \alpha_2$, didapat $\alpha_1 = x - y$ dan $\alpha_2 = y$ sedemikian sehingga $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Jadi, $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ membangun $\mathbb{R}^2$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\left\{\mathrm{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\} \in \mathbb{R}^2$ bebas linear. Ambil sebarang $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in R^2$ dengan $x, y \in R$. Berdasarkan **Definisi 1.5**, diperoleh suatu kombinasi linear $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$. Kemudian, berdasarkan **Definisi 1.6** dikatakan bahwa suatu kombinasi linear dikatakan bebas linear apabila memenuhi $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 =$

$0_{R^2}$. Pada pembuktian sebelumnya, sudah kita peroleh bahwa $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$. Dikarenakan ia bebas linear, diperoleh $\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Oleh karena itu, didapatkan $\alpha_2 = 0$. Hal ini mengakibatkan $\alpha_1 = 0$. Jadi, $\{v_1, v_2\}$ bebas linear.

Berdasarkan dua pembuktian di atas, terbukti bahwa $\left\{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ merupakan pembangun yang bebas linear di $R^2$ atau $\{v_1, v_2\}$ merupakan basis untuk $R^2$. Selanjutnya.apabila ruang vektor $V$ memiliki basis berhingga, $V$ disebut berdimensi hingga. Apabila kondisi tersebut tidak terpenuhi, $V$ disebut berdimensi tak hingga.

## 2. METODE

Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah studi literatur. Pada tahap pertama, akan ditunjukkan isomorfisma suatu ruang vektor dengan 3 tahapan, yaitu menunjukkan bahwa $f$ merupakan suatu pemetaan, menunjukkan bahwa $f$ suatu pemetaan linear, dan yang terakhir ialah menunjukkan bahwa f merupakan pemataan linear satu-satu dan pada.

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini dikaji beberapa Definisi, Lema, dan Teorema yang menjabarkan isomorfisma ruang vektor $V$.

**Definisi 3.1 (Isomorfisma pada Ruang Vektor)** *Misalkan $V$ ruang vektor berdimensi hingga atas $F$, dan $X$ basis terurut dari $V$. Representasi standar dari $V$ terhadap $X$ adalah pemetaan $f: V \to F^n$ yang didefinisikan oleh $f(v) = [v]_X$ untuk setiap $v \in V$. Ada yang menuliskan f dengan $\phi_X$.*

**Teorema 3.2** *Untuk setiap ruang vektor $V$ berdimensi hingga dan $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_3\}$ basis terurut dari $V$, diperoleh $f$(atau $\phi_X$) merupakan suatu isomorfisma.*

**Bukti.**

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $f$ merupakan suatu pemetaan. Ambil $v \in V$. Tulis $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Untuk $\alpha_i \in F, \forall i = 1,2, \cdots, n$, diperoleh $[v]_X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Setelah itu, kita definisikan terlebih dahulu fungsi f. Didefinisikan

$$f: V \to F^n$$
$$v \mapsto [v]_X$$

Kemudian, ambil $v_1, v_2 \in V$ dan $v_1 = v_2$. Tulis $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ dan $v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Untuk suatu $\alpha_i, \beta_i \in F, \forall i = 1,2, \cdots, n$. Andaikan $\alpha_i = \beta_i$. Dengan demikian, didapat

$$[v_1]_X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [v_2]_X$$

Jadi, $f: V \to F^n$ suatu pemetaan.

Setelah berhasil menunjukkan bahwa Jadi, $f: V \to F^n$ suatu pemetaan, langkah berikutnya ialah menunjukkan bahwa Jadi, $f: V \to F^n$ suatu pemetaan linier. Ambil $k_1, k_2 \in F$. Sehingga,

$$f(k_1 v_1 + k_2 v_2) = [k_1 v_1 + k_2 v_2]_X$$

$$= [k_1 v_1]_X + [k_2 v_2]_X$$
$$= k_1[v_1]_X + k_2[v_2]_X$$
$$= k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2)$$

Jadi, $f: V \rightarrow F^n$ suatu pemetaan linier.

Kemudian, akan ditunjukkan juga bahwa Jadi, $f: V \rightarrow F^n$ suatu pemetaan linier satu-satu. Ambil $v \in ker(f)$. Tulis $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Untuk suatu $\alpha_i \in F, \forall i = 1,2, \cdots, n$. Jelas bahwa $\{0\} \in ker(f)$ sehingga $\{0\} \subseteq ker(f)$. Perhatikan bahwa

$$0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f(v) = [v]_X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, didapat $\alpha_i = 0, \forall i = 1,2, \cdots, n$. Hal ini mengakibatkan $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0_v$. Artinya $ker(f) \subseteq \{0\}$. Jadi, $f: V \rightarrow F^n$ pemetaan linier satu-satu.

Langkah terkahir ialah dengan membuktikan bahwa Jadi, $f: V \rightarrow F^n$ suatu pemetaan pada. Ambil $w \in F^n$. Tulis $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Dengan demikian, terdapat $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in V$, sedemikian sehingga w= $[v]_X = f(v)$. Jadi, $f: V \rightarrow F^n$ pemetaan linier pada.

Dengan demikian, karena $f$ pemetaan linier satu-satu dan pada. Jadi, $f$ suatu isomorfisma.

**Teorema3.3** *Misalkan $V$ dan $W$ merupakan suatu ruang vektor berdimensi hingga atas $F$, dan $T: V \longrightarrow W$ suatu pemetaan linear. $T$ isomorfis jika dan hanya jika $dim(V) = dim(W)$*

**Bukti:**

($\Longrightarrow$) Akan ditunjukkan bahwa jika $T$ isomorfisma maka $dim(V) = dim(W)$. Misalkan $V$ isomorfis ke $W$ dan $T: V \longrightarrow W$ isomorfisma. Ambil $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ sebagai basis bagi $V$ dan $Y = \{T(x_1), T(x_2), T(x_3)\} \subseteq W$. Pandang kombinasi linear $0_w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i)$ untuk setiap $\alpha_i \in F$ dan $\forall i = 1, \cdots, n$. Selanjutnya, karena berlaku sifat komutatif perkalian dan assosiatif perkalian diperoleh $0_w = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)$.

Selanjutnya, karena $T$ isomorfisma. Hal ini menunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in Ker(T) = \{0_v\}$. Pandang $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. Mengingat $X$ merupakan basis bagi $V$, haruslah $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \cdots, n$. Dengan demikian, kombinasi linier $0_w = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_i = 0, \forall i = 1, \cdots, n$. Jadi, $Y$ bebas linier.

Ambil $w \in W$. Mengingat $T$ pada, terdapat $v \in V$ sedemikian sehingga $w = T(v)$. Selanjutnya, tulis $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ untuk suatu $\alpha_i \in F, \forall i = 1, \cdots, n$. Oleh karena itu, dengan mensubstutusi nilai $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ diperoleh $w = T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i)$. Selanjutnya, dengan menggunakan sifat komutatif perkalian dan assosiatif perkalian diperoleh $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T\,(x_i)$. Hal ini menunjukkan bahwa $Y$ membangun $W$. Mengingat $Y$ bebas linear di $W$, didapat bahwa $Y$ merupakan basis bagi $W$. Jadi, terbukti bahwa $dim(V) = dim(W)$.

($\Longleftarrow$) Akan dibuktikan jika $dim(V) = dim(W)$ maka $T$ isomorfisma. Misalkan $V$ dan $W$ suatu ruang vektor dan $dim(V) = dim(W)$. Selanjutnya, akan dibuktikan terdapat $T: V \longrightarrow W$ sedemikian sehingga $T$ isomorfisma. Ambil $T: V \longrightarrow W$ sebagai pemetaan linear dari $V$ ke $W$. Mengingat bahwa $T$ merupakan suatu pemetaan linier sehingga $T$ bisa kita definisikan dengan peta dari basis-basis $V$.

Misalkan $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dan $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ masing-masing adalah basis terurut dari $V$ dan $W$. Selanjutnya, akan kita definiskan $T(x_i) = y_i, \forall i = 1,2, \cdots, n$. Selanjutnya, akan dibuktikan $T$ isomorfisma. Ambil $v_1, v_2 \in V$ sedemikian sehingga $T(v_1) = T(v_2)$. Tulis $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ dan $v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ untuk $\alpha_i, \beta_i \in F, \forall i = 1,2, \cdots, n$.

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ dan $v_2 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ diperoleh $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = T(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i)$. Mengingat berlaku sifat assosiatif perkalian dan komutatif perkalian, persamaan tadi dapat kita ubah menjadi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T\,(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i T\,(x_i)$. Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai $T(x_i) = y_i$ diperoleh $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$. Langkah berikutnya ialah, kita tambahkan semua ruas dengan $-\sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$ sehingga diperoleh $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i = 0_w$. Selanjutnya, dengan menggunakan sikapditributif persamaan tadi dapat kita sederhanakan menjadi $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) y_i = 0_w$.

Kita tahu bahwa $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ merupakan basis bagi $W$ sehingga dapat dipastikan bahwa $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ bebas linier. Akibatnya, $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) y_i = 0_w$ hanya terpenuhi apabila $\alpha_i - \beta_i = 0$. Selanjutnya, kondisi ini menyebabkan bahwa $\alpha_i = \beta_i, \forall i = 1,2, \cdots, n$. Artinya, $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = v_2$. Jadi, $T(v_1) = T(v_2)$ sehingga mengakibatkan $v_1 = v_2$. Artinya, $T$ satu-satu.

Setelah itu, ambil sembarang $w \in W$. Selanjutnya, bisa kita peroleh $w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i$ untuk setiap $\gamma_i \in, \forall i = 1,2, \cdots, n$. Perhatikan bahwa untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$ berlaku $y_i = T(x_i)$ sedemikian sehingga $w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i = w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i T(x_i)$. Mengingat berlaku sifat assosiatif perkalian dan komutatif perkalian, diperoleh $T(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i)$. Selanjutnya, dengan mensubstitusi nilai $w = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i y_i$ diperoleh $T(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i) = T(w)$. Jadi, $T$ pada.

Dari semua pembuktian di atas, telah terbukti bahwa $T$ satu-satu dan pada. Oleh karena itu,dapat kita simpulkan bahwa $T$ isomorfisma. ■

## 4. PENUTUP

Dua buah ruang vektor $V$ dikatakan isomorfis apabila terdapat pemetaan yang bijektif, selain itu dua buah ruang vektor $V$ juga dikatakan isomorfis jika dan hanya jika mempunyai dimensi yang sama.

## UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih banyak saya ucapkan kepada tim editor dan dosen pembimbing yang sudah memberikan banyak kontribusi terbaik dalam pembuatan jurnal ini. Kemudian, tidak lupa juga saya ucapkan terimakasih kepada orang tua serta rekan-rekan yang senantiasa memberikan dukungan terbaik kepada saya untuk bisa menyelesaikan tulisan ini.

## REFERENSI

Arifin, A. (2000). *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.

Cahyaningsih, R. (2017). Representasi Grup G Terhadap Ruang Vektor V. *Tesis*. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.

Faizah, H. (2019). Pemahaman Mahasiswa tentang Konsep Grup pada Mata Kuliah Struktur Aljabar. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology,* 23-34.

Fraleigh, J. (1999). *First Course in Abstract Algebra.* Boston: Addison Wesley.

Lipschutz, S., & Lipson, M. (2006). *Aljabar Linear Edisi Ketiga.* Jakarta: Erlangga.

Meitia, S., Bakar, Nova, N., & Yanita. (Jurnal Matematika UNAND). *Sifat-SIfat Aljabar Lie.* 2019: 8.

Misri, M. A. (2010). *Submodul Prima dan Modul Perkalian (Tesis).*

Misri, M. A. (2017). *Struktur Grup.* Cirebon: CV. Confident.

O'Connor, J., & Robertson, E. (2005). *Biografi Pembunuhan Wihelm.* Arsip Sejarah Matematika MacTutor.

Santoso, B., Fitriani, & Faisol, A. (2013). Teorema Jacobson Density. *Prosiding Seminar dan Rapat Tahunan BKS PTN Barat.* Lampung: FMIPA, Unila.