

PENGUNAAN DIAGONALISASI MATRIKS DALAM PEWARISAN GENETIK

Siti Zumrotul Faridah¹, Ali Misri², Yuyun Maryuningsih³

^{1,2}Tadris Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan IAIN Syekh Nurjati Cirebon,

³Tadris Biologi Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan IAIN Syekh Nurjati Cirebon,

^{1,2,3}Jl. Perjuangan By Pass Sunyaragi, Kec. Kesambi, Kode Pos 45132, Kota Cirebon
zumrotulfaridahsiti@gmail.com

Abstrak

Pewarisan sifat dari perkawinan orang kembar menarik untuk dikaji bagaimana peluang keturunan yang didapatkan sampai generasi ke n . pertanyaan yang timbul dari keturunan kembar adalah apakah ada persamaan matematis yang menjelaskan bagaimana pewarisan sifat kembar ini diturunkan. Penelitian ini merupakan penelitian terapan dengan pendekatan model matematik untuk menentukan persamaan matematis dari keturunan kembar yang didapatkan dari duapuluh sampel kembar. Instrumen penelitian berupa angket, wawancara dan observasi. Penyelidikan pewarisan genetik dari kembar, dapat diterapkan konsep diagonalisasi matriks dengan bentuk persamaan $D = PAP^{-1}$. Untuk menentukan formula dalam pewarisan genetik pada generasi ke- n menggunakan persamaan $X^n = P^{-1}D^nPX^0$ untuk masing-masing persilangan dimana n menuju tak hingga.

Kata Kunci: Diagonalisasi Matrik, Nilai eigen, Vektor Eigen, Genotip

1. PENDAHULUAN

Salah satu fungsi atau kegiatan matematika adalah kalkulasi atau menghitung, sehingga hampir semua orang menyebutkan matematika adalah ilmu hitung atau ilmu al-hisab yang artinya berhitung (Muniri, 2016, hal. 169). Dalam matematika, teori matriks merupakan salah satu cabang ilmu aljabar linear yang menjadi pembahasan yang penting. Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, pengaplikasian matriks telah banyak dijumpai pada bidang lain, misalnya bidang ekonomi, fisika dan biologi. (Agustini, 2016, hal. 1). Metode-metode matematika dibutuhkan untuk mempermudah menyelesaikan masalah yang terdapat dalam berbagai bidang, metode-metode tersebut disusun sesuai sistem aslinya yang dinamakan pemodelan matematika. Model matematika dapat berupa persamaan, pertidaksamaan dan sebagainya. Sebuah model matematika dirancang untuk menggambarkan operasi sistem nyata yang terkait dengan masalah matematika (Muchidin, 2016, hal. 2).

Masalah biologi yang dapat diselesaikan dengan matriks, salah satunya adalah masalah genetika. Genetika merupakan salah satu cabang dari ilmu biologi yang mempelajari hereditas yaitu penurunan sifat dari satu generasi ke generasi berikutnya. Dalam bidang genetika, permasalahan yang ditemukan adalah mengetahui suatu individu unggul dari beberapa generasi dengan melakukan persilangan yang kontinu. Apabila dilakukan secara konvensional memerlukan waktu yang cukup lama jika spesies tergolong langka. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan analisis diagonalisasi

matriks berdasarkan peluang genotif induk. Matriks yang digunakan berasal dari tabel peluang genotip induknya (Kaffah, 2015). Rumus yang digunakan dalam menyelidiki pewarisan genetik adalah $D = PAP^{-1}$, dimana D merupakan diagonalisasi matriks, A merupakan matriks yang diperoleh dari tabel peluang persilangan, P merupakan matriks yang terbentuk dari vektor eigen matriks A dan P^{-1} adalah invers dari matriks P (Ismiah, 2009). Penelitian ini menggunakan teori Diagonalisasi matriks yang diimplementasikan pada ilmu biologi khususnya pewarisan genetik pada kembar.

2. KAJIAN PUSTAKA

A. Matriks

Definisi 2.1. Suatu matriks (*matrix*) adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom dengan panjang ditunjukkan oleh banyaknya baris dan kolom. Suatu matriks dinotasikan dengan huruf kapital dan umumnya dinyatakan dengan tanda kurung siku []. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton, 1997, hal. 22). Elemen yang terletak pada baris I dan kolom j didalam matriks A akan dinyatakan sebagai a_{ij} . Dalam notasi matriks $A = [a_{ij}]$ untuk $i = 1, \dots, m$ dan $j = 1, \dots, n$ sehingga matriks $m \times n$ umumnya sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bilangan-bilangan $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ menyusun rangkaian matriks disebut unsur dari matriks, sedangkan ordo atau ukuran suatu matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom.

B. Nilai dan Vektor Eigen

Definisi 2.2 Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$, sekalar λ disebut sebagai suatu nilai eigen atau nilai karakteristik dari A apabila terdapat suatu vektor tak nol x yang bersesuaian dengan nilai eigen sehingga memenuhi persamaan $Ax = \lambda x$. Secara ekuivalen, vektor x disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari λ (Leon, 2001, hal. 260). Nilai eigen matriks yang berukuran $n \times n$ dapat ditulis kembali $Ax = \lambda x$. Sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau secara ekuivalen.

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (1)$$

Agar λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecah bukan nol dari persamaan (1). Suatu persamaan mempunyai pemecah bukan nol jika dan hanya jika:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan karakteristik A, sekalar λ yang memenuhi persamaan tersebut merupakan nilai eigen dari matriks A.

C. Diagonalisasi matriks

Definisi 2.3 Suatu matriks bujur sangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal. (Howard Anton, 2004, hal. 395).

Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mendiagonalisasikan matriks A yang berukuran $n \times n$ adalah sebagai berikut.

Langkah 1: Carilah nilai vektor eigen bebas linear dari A yakni $P_1, P_2, \dots, P_n$.

Langkah 2: Membentuk matriks P yang mempunyai $P_1, P_2, \dots, P_n$ sebagai vektor-vektor kolomnya

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & p_{mn} \end{bmatrix}$$

Sehingga $P^{-1}AP$ diagonal

Katakan $P^{-1}AP = D$, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Sehingga $AP = PD$

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m1} & p_{m2} & \dots & \lambda_n p_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika dimisalkan $P_1, P_2, \dots, P_n$ menyatakan vektor-vektor kolom P maka kolom-kolom AP yang berurutan adalah:

$$AP_1 = \lambda_1 p_1, AP_2 = \lambda_2 p_2, \dots, AP_n = \lambda_n p_n \quad (3)$$

Berdasarkan persamaan (3) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen A dan $P_1, P_2, \dots, P_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian.

Langkah 3: Matriks $P^{-1}AP$ akan didiagonalkan dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah unsur diagonal utamanya yang berurutan, dimana λ_1 adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan $p_i = 1, 2, \dots, n$ maka $P^{-1}AP = D$ untuk suatu matriks diagonal D . Sehingga $A = PDP^{-1}$ dan akibatnya $A^n = PD^nP^{-1}$.

D. Kajian Tentang Genetik

1. Pewarisan Autosomal

Terjadinya pewarisan sifat disebabkan karena adanya perkawinan antara dua individu yang sejenis, perkawinan dua individu sejenis yang memiliki sifat berbeda disebut persilangan. Persilangan dapat dilakukan secara sengaja oleh manusia dengan maksud memperoleh individu baru yang memiliki sifat unggul (Kurniawati & Lukito, 2014, hal. 59). Pewarisan Autosomal adalah pewarisan sifat yang ditentukan oleh gen pada *autosom*. Gen tersebut meliputi gen dominan dan gen resesif, karena laki-laki dan perempuan mempunyai autosom yang sama, maka sifat keturunan yang ditentukan oleh gen autosomal dapat dijumpai pada keturunan laki-laki maupun perempuan

2. Pewarisan Gen kembar

Faktor genetik mempunyai peran cukup penting untuk menentukan seberapa besar orang tua memiliki bayi kembar, kelahiran bayi kembar dipengaruhi oleh gen yang ada pada orang tuanya yaitu gen kembar dan gen tidak kembar. Persilangan individu yang memiliki dua sifat beda yang disebut dengan persilangan dihibrid. Berbicara hukum pewarisan sifat Mendel adalah orang pertama yang menjelaskan secara sistematis

mekanisme pewarisan sifat. Pada hasil percobaan Mendel dengan tanaman ercis yakni pada bijinya, terdapat 2 sifat beda yaitu bentuk dan warna biji.

3. METODE

Penelitian ini menggunakan metode terapan (*applied/research*) adalah suatu kegiatan menyelidiki yang dilakukan dengan sangat hati-hati untuk mengetahui sesuatu yang cenderung bersifat praktis, penelitian terapan digunakan untuk mengembangkan sesuatu yang telah ada atau memperbaiki sesuatu yang telah dilaksanakan sebelumnya, sehingga dapat segera dimanfaatkan oleh masyarakat baik untuk kepentingan ekonomi, sosial, politik, pendidikan dan lain-lainnya. Penelitian terapan digunakan untuk memperinci hasil penemuan penelitian dasar sehingga hasil penelitiannya dapat digunakan secara praktis. Hasil penelitian terapan diterapkan untuk mengembangkan atau memperbaiki program yang telah dirancang dan dilaksanakan sebelumnya. Hasil penelitian tidak harus sebagai penemuan baru, tetapi merupakan aplikasi baru dari penelitian yang telah ada (Manfaat T. S., 2015, hal. 23).

Penelitian ini menggunakan pendekatan model matematika, model matematika merupakan salah satu jenis metode penelitian. Model matematika adalah model yang menggunakan seperangkat simbol matematika seperti variabel, persamaan, konstanta dan sebagainya yang menunjukkan hubungan dari sebuah permasalahan yang nyata. Terdapat tiga tahapan dalam membuat sebuah model matematika yaitu: formulasi, manipulasi matematika dan evaluasi (Manfaat B. , 2004, hal. 9-10)

1. Formulasi

- a. Tahapan ini dilakukan dengan tiga langkah:
- b. Memulai dengan sebuah pertanyaan penelitian
- c. Memeriksa faktor-faktor yang berkaitan dengan pertanyaan penelitian
- d. Menuliskan dalam bentuk matematika

2. Manipulasi matematika

Bentuk matematika yang telah dibuat, dimanipulasi (merubah bentuk tanpa mengurasi isi) dengan menggunakan konsep-konsep dalam matematika seperti perkalian, diagonalisasi dan sebagainya untuk mendapatkan formulasi yang diinginkan.

3. Evaluasi

Tahap evaluasi adalah tahap terakhir untuk menguji apakah model yang telah terbentuk sudah sesuai dan tidak melenceng dari sistem yang sebenarnya. Jika model yang dibuat telah memenuhi maka proses model matematika telah selesai dan dapat digunakan untuk kepentingan penelitian.

4. HASIL DAN DISKUSI

1. Penentuan Distribusi Genotip dari Persilangan

Laki-laki : XY

Perempuan : XX

Untuk mengkonotasikan gen kembar maka penulis menganalogikan

Laki-laki dari XY $\rightarrow$ LL

Perempuan dari XX $\rightarrow$ PP

Tabel 1
Distribusi Genotip

P1	Pasangan induk pertama dari persilangan jenis kelamin
P2	Pasangan induk kedua dari suatu makhluk hidup
F1	Keturunan pertama pada makhluk hidup
F2	Keturunan kedua dari suatu makhluk hidup
LLPP	Alel dominan homozigot
llpp	Alel resesif homozigot
LlPp	Alel heterozigot
L	Gen untuk Laki-laki kembar
l	Gen untuk Laki-laki tidak kembar
P	Gen untuk Perempuan kembar
p	Gen untuk perempuan tidak kembar

Tabel 1 menunjukkan anggota dari pasangan gen yang memiliki pengaruh berlawanan disebut alel. Pada persilangan anak kembar, L menentukan gen laki-laki kembar dan P menentukan gen perempuan kembar, l menentukan gen laki-laki tidak kembar dan p menentukan gen perempuan tidak kembar, sehingga L, l, P, p merupakan alel pada persilangan dihibrid. Persilangan antara gen kembar dominan homozigotik dan gen tidak kembar ditunjukkan pada Tabel 2

Tabel 2
Persilangan Gen Kembar dominan homozigotik dan Gen Tidak Kembar

P	=	Lk Pr Kembar	Lk Pr Tidak Kembar
		LLPP	× llpp
Gamet	=	LP	lp
F1	=	LlPp	
F1 disilangkan dengan sesamanya untuk menghasilkan F2			
P2/F1	=	LlPp	× LlPp
Gamet	=	LP, Lp, lP, lp	LP, Lp, lP, lp
F2	=	LP: Lp : lP : lp	

Tabel 2 menunjukkan hasil persilangan untuk keturunan pertama adalah laki-laki perempuan kembar (LlPp kembar) karena L bersifat dominan terhadap l dan P bersifat dominan terhadap p. Hasil persilangan tersebut yaitu persilangan antara gen kembar dominan homozigotik dan gen tidak kembar, menghasilkan keturunan yang kembar dan juga keturunan yang tidak kembar. Semenata hasil persilangan F1 antara LlPp dan LlPp (Kedua induk atau orang tua kembar heterozigot) menghasilkan empat macam gamet. Persilangan antara gen kembar dominan dan gen kembar heterozygote, dijabarkan pada Tabel 3.

Tabel 3
Hasil Persilangan Gen Kembar antara LLPP dengan LlPp

Genotip	LP	Lp	lP	lp
LP	LLPP (Lk Pr Kembar)	LLPp (Lk Pr Kembar)	LlPP (Lk Pr Kembar)	LlPp (Lk Pr Kembar)
Lp	LLPp (Lk Pr Kembar)	LLpp (Lk kembar Pr Tdk Kembar)	LlPp (Lk Pr Kembar)	Llpp (Lk kembar Pr Tdk Kembar)
lP	LlPP (Lk Pr Kembar)	LlPp (Lk Pr Kembar)	llPP (Lk Tdk Kembar Pr Kembar)	llPp (Lk Tdk Kembar Pr Kembar)
lp	LlPp (Lk Pr Kembar)	Llpp (Lk kembar Pr Tdk Kembar)	llPp (Lk Tdk Kembar Pr Kembar)	Llpp (Lk Pr Tidak kembar)

Tabel 3 menunjukkan hasil persilangan dengan perbandingan $\frac{1}{16}$ dari LLPP, $\frac{1}{8}$ dari LLPp, $\frac{1}{16}$ dari LLpp, $\frac{1}{8}$ dari LlPP, $\frac{1}{4}$ dari LlPp, $\frac{1}{8}$ dari Llpp, $\frac{1}{16}$ dari llPP, $\frac{1}{8}$ dari llPp dan $\frac{1}{16}$ dari llpp. Perbandingan tersebut, dapat dinyatakan bahwa $\frac{1}{16}$ dari anak mereka adalah normal (kembar) PPTT, $\frac{1}{4}$ adalah pembawa sifat kembar atau heterozigot (LlPp) dan $\frac{1}{16}$ adalah carier atau memiliki kelainan (tidak kembar) llpp. Terdapat sembilan macam keturunan pada persilangan kembar tersebut yaitu:

Tabel 4

Sembilan Karakter yang dihasilkan Beserta Nilai Peluangnya				
No	Genotip	Fenotip	Jumlah	Probabilitas
1	LLPP	Laki-laki perempuan kembar	1	$\frac{1}{16}$
2	LLPp	Laki-laki perempuan kembar	2	$\frac{1}{8}$
3	LLpp	Laki-laki kembar perempuan tidak kembar	1	$\frac{1}{16}$
4	LlPP	Laki-laki perempuan kembar	2	$\frac{1}{8}$
5	LlPp	Laki-laki perempuan kembar	4	$\frac{1}{4}$
6	Llpp	Laki-laki kembar perempuan tidak kembar	2	$\frac{1}{8}$
7	llPP	Laki-laki tidak kembar perempuan kembar	1	$\frac{1}{16}$
8	llPp	Laki-laki tidak kembar perempuan kembar	2	$\frac{1}{8}$
9	llpp	Laki-laki perempuan tidak kembar	1	$\frac{1}{16}$

Adapun persilangan terkontrol adalah persilangan antara individu normal dengan seluruh kemungkinan genotif yang ada yaitu sebagai berikut:

1. Persilangan genotip LLPP dan LLPP menghasilkan keturunan dengan genotip LLPP (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya adalah 1. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:

P (induk) : LLPP x LLPP

Gamet : LP dan LP

Tabel 5

Persilangan antara LLPP x LLPP	
Gamet	LP
LP	LLPP (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPP) = \frac{n(LLPP)}{n(s)} = \frac{1}{1} = 1$$

Nilai peluang = 1, dapat dilihat pada baris pertama kolom pertama

2. Persilangan genotip LLPP dan LLPp menghasilkan keturunan dengan genotip LLPP dan LLPp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya $\frac{1}{2}$. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:

P (induk) : LLPP x LLPp

Gamet : LP, LP dan Lp

Tabel 6
Persilangan antara LLPP x LLPp

Gamet	LP	Lp
LP	LLPP (laki-laki perempuan kembar)	LLPp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPP) = \frac{n(LLPP)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(LLPp) = \frac{n(LLPp)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nilai peluang = $\frac{1}{2}$, dapat dilihat pada baris pertama dan kedua dikolom kedua.

3. Persilangan genotip LLPP dan LLPp menghasilkan keturunan dengan genotip LLPp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya 1. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:

P (induk) : LLPP x LLPp

Gamet : LP dan Lp

Tabel 7
Persilangan antara LLPP x LLPp

Gamet	Lp
LP	LLPp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPp) = \frac{n(LLPp)}{n(s)} = \frac{1}{1} = 1$$

Nilai peluang = 1, dapat dilihat pada baris kedua kolom ketiga

4. Persilangan genotip LLPP dan LIPP menghasilkan keturunan dengan genotip LLPP dan genotip LIPP (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya $\frac{1}{2}$. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:

P (induk) : LLPP x LIPP

Gamet : LP, LP dan LP

Tabel 8
Persilangan antara LLPP x LIPP

Gamet	LP	LP
LP	LLPP (laki-laki perempuan kembar)	LLPp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPP) = \frac{n(LLPP)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(LLPp) = \frac{n(LLPp)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nilai peluang = $\frac{1}{2}$ dapat dilihat pada baris pertama dan keempat dikolom keempat

5. Persilangan genotip LLPP dan LIPp menghasilkan keturunan dengan genotip LLPP, LLPp, LIPP, LIPp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya $\frac{1}{4}$. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:

P (induk) : LLPP x LIPp

Gamet : LP, LP, Lp dan lp

Tabel 9
Persilangan antara LLPP x LlPp

Gamet	LP	Lp	lP	lp
	LLPP	LLPp	LIpp	LIpp
LP	(laki-laki perempuan kembar)	(laki-laki perempuan kembar)	(laki-laki perempuan kembar)	(laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPP) = \frac{n(LLPP)}{n(s)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(LLPp) = \frac{n(LLPp)}{n(s)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(LlPP) = \frac{n(LlPP)}{n(s)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(LlPp) = \frac{n(LlPp)}{n(s)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Nilai peluang = $\frac{1}{4}$, dapat dilihat pada baris pertama, kedua, keempat dan kelima dikolom keempat.

6. Persilangan genotip LLPP dan Llpp menghasilkan keturunan dengan genotip LLPP dan LIpp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya $\frac{1}{2}$. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:
P (induk) : LLPP x Llpp
Gamet : LP, Lp dan lp

Tabel 1
Persilangan antara LLPP x Llpp

Gamet	Lp	Lp
LP	LLPp (laki-laki perempuan kembar)	LIpp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPp) = \frac{n(LLPp)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(LlPp) = \frac{n(LlPp)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nilai peluang = $\frac{1}{2}$, dapat dilihat pada baris kedua dan kelima dikolom keenam

7. Persilangan genotip LLPP dan lIPP menghasilkan keturunan dengan genotip LIpp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya 1. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:
P (induk) : LLPP x lIPP
Gamet : LP dan lP

Tabel 11
Persilangan LLPP x lIPP

Gamet	lP
LP	LIpp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LIpp) = \frac{n(LIpp)}{n(s)} = \frac{1}{1} = 1$$

Nilai peluang = 1, dapat dilihat pada baris keempat kolom ketujuh

8. Persilangan genotip LLPP dan lIPp menghasilkan keturunan dengan genotip LIpp dan LIpp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya $\frac{1}{2}$. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:
P (induk) : LLPP x lIPp
Gamet : LP, lP dan lp

Tabel 12
Persilangan antara LLPP x llPp

Gamet	LP	lp
LP	LLPP (laki-laki perempuan kembar)	llPp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(LLPP) = \frac{n(LLPP)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(llPp) = \frac{n(llPp)}{n(s)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nilai peluang = $\frac{1}{2}$, dapat dilihat pada baris keempat dan kelima dikolom kedelapan

9. Persilangan genotip LLPP dan llpp menghasilkan keturunan dengan genotip llPp (laki-laki perempuan kembar) dengan nilai peluangnya 1. Adapun nilai peluang yang diperoleh dari kemungkinan genotip yang disilangkan adalah:

P (induk) : LLPP x llpp

Gamet : LP dan lp

Tabel 13
Persilangan antara LLPP x llpp

Gamet	Lp
LP	llPp (laki-laki perempuan kembar)

$$P(llPp) = \frac{n(llPp)}{n(s)} = \frac{1}{1} = 1$$

Nilai peluang = 1, dapat dilihat pada baris kelima kolom kesembilan

Tabel 14
Nilai Peluang Persilangan LLPP dengan Semua Kemungkinan

Genotip Kerurunan		Genotip Induk								
		LLPP	LLPP	LLPP	LLPP	LLPP	LLPP	LLPP	LLPP	
		x	x	x	x	x	x	x	x	
		LLPP	LLPp	LLpp	LIPP	LIPp	Llpp	lIPP	lIPp	llpp
		a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_{n-1}	LLPP	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
b_{n-1}	LLPp	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
c_{n-1}	LLpp	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_{n-1}	LIPP	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
e_{n-1}	LIPp	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
f_{n-1}	Llpp	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g_{n-1}	lIPP	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_{n-1}	lIPp	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i_{n-1}	llpp	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 14 diatas merupakan tabel peluang persilangan LLPP dengan seluruh kemungkinan yang ada, selanjutnya tabel tersebut akan dioperasikan kedalam matriks.

2. Aplikasi Diagonalisasi matriks Pada Pewarisan Genetik

Untuk menyelidiki aplikasi diagonalisasi matriks pada pewarisan genetik sampai generasi ke-n, gunakan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Membentuk persamaan linear dari tabel yang menjelaskan peluang masing-masing genotip sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks
2. Membentuk matriks A, kemudian dicari nilai eigen matriks A sehingga diperoleh vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya.
3. Membentuk matriks P dari vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigennya
4. Mensubstitusikan matriks A dengan matriks D yang sudah terlebih dahulu didiagonalisasi oleh P
5. Menyelesaikan persamaan distribusi genotip pada generasi ke-n
6. Membentuk sebuah persamaan eksplisit
7. Mencari limit dari masing-masing persamaan untuk n menuju tak hingga. (Nurmia, 2017, hal. 13)

Untuk menghitung probabilitas gen yang dimiliki satu individu maka dapat dibuat dengan distribusi dari kesembilan genotip yang mungkin pada gen kembar tersebut sejumlah generasi dapat dibuat sebagai berikut:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} \text{ untuk } n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Dari Tabel 14 dapat ditentukan distribusi genotip generasi terdahulu dengan menggunakan persamaan, dimana persamaan itu menyatakan bahwa semua keturunan yang dihasilkan yakni $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n$ dan i_n . Sedangkan $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}, e_{n-1}, f_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-1}$ dan i_{n-1} menyatakan persilangan genotip induk yakni antara genotip LLPP dengan semua kemungkinan yang ada. sedangkan koefisien-koefisien dari sembilan persamaan itu berasal dari probabilitas genotip kembar yang mungkin dimiliki oleh individu tersebut dari hasil perkawinan, persamaan itu adalah:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} + \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{4} f_{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} + \frac{1}{4} e_{n-1} + \frac{1}{2} f_{n-1} \\ c_n &= 0 \\ d_n &= \frac{1}{2} d_{n-1} + \frac{1}{4} e_{n-1} + g_{n-1} + \frac{1}{2} h_{n-1} \\ e_n &= \frac{1}{4} e_{n-1} + \frac{1}{2} f_{n-1} + g_{n-1} + \frac{1}{2} h_{n-1} \\ f_n &= 0 \\ g_n &= 0 \\ h_n &= 0 \\ i_n &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Diperoleh x^n menyatakan distribusi ke-n dan $x^{(n-1)}$ menyatakan distribusi generasi sebelumnya atau genotip induk. Kemudian dapat ditulis persamaanya dalam notasi matriks sebagai berikut

$$X^n = AX^{n-1} \quad (6)$$

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} \dots x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \\ g_{n-1} \\ h_{n-1} \\ i_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian diagonalisasi matriks A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 - 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 - \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 - \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan program *Maple 18*, diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{4}, \lambda_3 =$

$$\frac{1}{2}, \lambda_4 = \frac{1}{2}, \lambda_5 = 0, \lambda_6 = 0, \lambda_7 = 0, \lambda_8 = 0, \lambda_9 = 0$$

Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE) diperoleh

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah sebagai berikut

$$x_2 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0$$

$$x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 0$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

$$x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 = 0$$

$$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$$

$$x_7 + x_8 + x_9 = 0$$

$$x_8 + x_9 = 0$$

$$x_9 = 0 \text{ sehingga } x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$$

Misalkan $x_1 = s$ maka vector eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Adalah sebuah basis ruang eigen yang terkait $\lambda = 1$

Untuk $\lambda = \frac{1}{2}$, digunakan cara yang sama seperti pengoprasian $\lambda = 1$. Sehingga diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = \frac{1}{2}$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -s \\ 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -s \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = \frac{1}{4}$, digunakan cara yang sama seperti pengoprasian $\lambda = 1$. Sehingga diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = \frac{1}{4}$ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} s \\ -s \\ 0 \\ -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ sehingga } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk 0 digunakan cara yang sama seperti pengoperasian $\lambda = 1$. Sehingga diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan 0 sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -p \\ 2p \\ 0 \\ 2p \\ -4p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ 0 \\ -2q \\ 0 \\ 0 \\ q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \\ -2r \\ 0 \\ r \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ -2s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Terdapat Sembilan vektor eigen basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasikan. Sembilan vektor eigen tersebut dibentuk sebuah matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan invers matriks P. Dengan menggunakan *Maple 18*, maka diperoleh invers matriks P sebagai berikut

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan maple 18 maka diperoleh

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, diperoleh $X^n = A^n x^0 = P^{-1}D^nPX^0$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 & 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1 \\ 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)d_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)e_0 \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)f_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)g_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right)h_0 \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right)i_0 \\ b_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)i_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)e_0 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right)f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 \\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right)g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)i_0 \\ e_n &= \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0 \end{aligned}$$

$$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0 \text{ untuk } n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Persamaan (7) merupakan persamaan eksplisit untuk setiap freksi-freksi dari kesembilan genotif pada generasi ke-n yang ditinjau dari freksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \rightarrow \infty$, maka limit persamaan diatas adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)b_0 + \dots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right)i_0 \\ &= a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)b_0 + \dots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right)i_0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} d_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)e_0 + \dots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right)i_0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} e_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0 = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh peluang genotip keturunan untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0 \\ b_n &= c_n = d_n = e_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0 \end{aligned}$$

Persamaan-persamaan tersebut digunakan untuk menentukan peluang generasi ke-n pada suatu populasi dengan berdasar kepada perkawinan silang yang terkontrol.

5. PENUTUP

1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, dapat disimpulkan bahwa dalam pewarisan genotip kembar identik dapat dicari peluang pada generasi ke-n dengan menerapkan aljabar matriks dengan mendiagonalisasi matriks A, hasil persilangan genotip induk kembar identik dengan persilangan terkontrol (persilangan genotip induk LLPP dengan seluruh kemungkinan genotip dihibrid) dapat diperoleh dari perkalian silang induk dengan seluruh kemungkinan sifat yang timbul. Bentuk formula yang diperoleh berdasarkan persilangan atau perkawinan silang terkontrol, sehingga terdapat 9 macam persilangan terkontrol yang menghasilkan 81 bentuk persamaan dalam penentuan peluang genotip keturunan. Pada persilangan induk yang mempunyai 2 bentuk persamaan akan memperoleh hasil peluang keturunan yang sama dengan peluang perkawinan silang pada ilmu genetika pada umumnya.

Hasil tersebut diperoleh dengan menggunakan diagonalisasi matriks, dengan demikian penggunaan diagonalisasi matriks dalam menentukan keturunan dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Aplikasi diagonalisasi matriks untuk menyelidiki pewarisan genotip pada pewarisan sifat kembar generasi ke-n adalah sebagai berikut:
 - a. Membentuk persamaan linear dari table yang menjelaskan peluang persilangan kembar identik dari masing-masing genotip sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks.
 - b. Membentuk matriks A kemudian dicari nilai-nilai eigen dari matriks A sehingga diperoleh nilai-nilai vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut
 - c. Membentuk matriks P yang berisikan nilai-nilai vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen
 - d. Mendiagonalisasikan matriks P yang kemudian menjadi matriks
 - e. Substitusikan matriks A dengan matriks D
 - f. Menyelesaikan persamaan distribusi genotip dalam generasi ke-n
 - g. Membentuk sebuah persamaan eksplisit
 - h. Dicari limit dari masing masing persamaan untuk n menuju tak hingga.
2. Untuk setiap hasil persilangan genotip kembar identik pada populasi generasi ke-n, akan diperoleh dari matriks A yang didiagonalkan, kemudian membentuk matriks P yang dapat dibalik dan terdapat matriks diagonal D. sehingga dapat dinyatakan $A^n = PD^nP^{-1}$. untuk menyelesaikan persamaan eksplisit tersebut dapat dicari dengan menggunakan rumus

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= A^n X^{(0)} \\ &= PD^n P^{-1} X^{(0)} \end{aligned}$$

Hasil perhitungan dengan menggunakan persamaan tersebut didapatkan bahwa pada generasi ke-n dimana limit untuk n menuju tak terhingga anak bersifat normal, yakni tidak terdapat generasi yang kembar dan membawa gen kembar.

2. Saran

Adapun saran yang dapat peneliti sampaikan yaitu selain menggunakan matriks, dapat juga menggunakan metode lain untuk perkawinan trihibrid atau polihibrid dengan perkawinan acak. Karena dalam perkawinan secara acak akan banyak menghasilkan

persamaan- persamaan tak linear, sehingga dapat digunakan metode lain pada penelitian selanjutnya

UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih kepada Editor dan reviewer atas kritik dan sarannya. Terima kasih kepada Jurusan Tadris matematika IAIN Syekh Nurjati Cirebon atas masukan dan bimbingan yang telah diberikan pada saat pembuatan jurnal ini baik secara langsung dan tidak langsung sehingga jurnal ini dapat terselesaikan.

REFERENCES

- Agustini. (2016). *Implementasi Diaoganisasi Matriks Untuk Menyelididki Pewarisan Autosomal generasi Ke-n*. Makasar: Universitas Islam Negeri Alauddin Makasar.
- Anton, H. (1997). *Aljabar Linear Elementer Edisi Kelima*. Jakarta: Erlangga.
- Howard Anton, d. R. (2004). *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi edisi Kedelapan/ Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Ismiah, N. (2009). *Aplikasi Diagonalisasi matriks untuk Menyelidiki Pewarisan pada Genotip generasi ke-n*. Malang: Universitas Islam Negri (UIN) Malang.
- Kaffah, M. S. (2015). Analisis Diagonalisasi Matriks untk Menentukan Individu ke-n Berdasarkan Peluang Genotif Induk. *Biowallance*, Vol 1, No 2 (2015) Boiwallance Vol 1 No 2.
- Kurniawati, F. R., & Lukito, A. (2014). Struktur Aljabar pada Pewarisan Genetik. *MATHunesa*, 59.
- Leon, S. J. (2001). *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Jakarta: Erlangga.
- Manfaat, B. (2004). *Model Pengendalian Persediaan Untuk Persoalan pemasok Lele dalam Mengoptimalkan Biaya pengadaan Pemeliharaan dan kesenjangan (Teknik Analitik dengan pendekatan Kalkulus diferensial)*. Malang: Universitas Islam Negeri Malang.
- Manfaat, T. S. (2015). *Dasar-Dasar Metodologi Penelitian*. Cirebon: Eduvision.
- Muchidin, A. (2016). *Pemodelan Sistem*. Yogyakarta: Deepublish.
- Muniri. (2016). Kontribusi Matematika dalam Konteks Fikih. *Ta'allum*, Vol 04, No 02 193-214.
- Nurmia. (2017). Application of Matrix Diagonalization to Investigate the Inheritance of Genotypes in the nth Generation Genetics. *Eprints Universitas Negeri Makasar*, 13.

