NURJATI JOURNAL OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL SCIENCES
Publikasi Online : Oktober 2021
Volume 1, Nomor 2, 2021. Hal. 95 – 114
Journal homepage: **www.syekhnurjati.ac.id/jurnal/index.php/njmms**
email: **njmms@syekhnurjati.ac.id** e-issn: 2776-0383

POLA GRAF PEMBAGI NOL DARI GELANGGANG BILANGAN BULAT MODULO n ($\mathbb{Z}n$)

Deni
Muhamad Ali Misri
Herlinda Nurafwa Sofhya
IAIN Syekh Nurjati Cirebon
Jl. Perjuangan ByPass Sunyaragi 45132 Cirebon Indonesia
deni28tmtk@gmail.com

Abstrak

The study of graphs is one of the studies that is of great interest to researchers to study, one of which is the study of graphs in the field. Moreover, each type of graph has a certain pattern related to the shape of the graph, the number of vertices, the number of edges and the number of degrees of all the vertices in the graph. From these problems, the authors conducted this research. This study uses a literature study research method, namely collecting data and information from books, scientific journals, theses and theses. After looking for some examples of graphs that divide zero in a modulo n integer ring, the theorem of the graph form, the number of vertices, the number of edges and the number of degrees of all the vertices of the graph is obtained through proof.

Kata Kunci: graf, gelanggang, graf pembagi nol, jumlah simpul graf, jumlah sisi graf, derajat simpul.

1. PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Matematika merupakan disipilin ilmu yang menjadi pondasi berbagai disiplin ilmu yang lain. Sejalan dengan perkembangan teknologi yang bersifat dinamis, para ilmuan matematika juga terus melakukan penelitian dalam disipilin ilmu matematika dan mengembangkannya. Salah satu cabang matematika yang dapat diteliti lebih lanjut adalah teori graf. Di beberapa permasalahan, graf digunakan sebagai alat pemodelan untuk menjelaskan dan menyelesaikan permasalahan dengan baik. Sebab itu, penelitian tentang graf masih menjadi materi yang dikaji oleh banyak ilmuan matematika hingga saat ini.

Graf merupakan pasangan himpunan simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul. Sementara itu, gelanggang adalah himpunan tak kosong terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi sifat grup komutatif terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap perkalian, dan bersifat distributif terhadap penjumlahan dan perkalian. Jika R gelanggang komutatif maka $a \neq 0$, $a \in R$ dikatakan pembagi nol jika terdapat $b \in R$, $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$. Graf pembagi nol dari gelanggang komutatif pertama kali digagas oleh Beck

(1988) dalam jurnal yang berjudul "*Coloring of Commutative Ring*". Dalam jurnalnya Beck menotasikan graf pembagi nol dari gelanggang komutaif dengan $\Gamma(R)$, yaitu suatu graf dengan simpul-simpulnya adalah semua elemen dari R dan dua simpul terhubung jika perkalian simpul keduanya adalah nol.

Dalam jurnalnya Anderson dan M.Naseer (1993) mendefinisikan graf pembagi nol sebagai simpul dari graf pembagi nol-nya adalah semua elemen dari ring R dan dua simpul yang berbeda, misal x dan y terhubung oleh suatu sisi atau bertetangga jika dan hanya jika $x.y = 0$ untuk $x,y \neq 0$, dalam hal ini $x.y$ merupakan unsur pembagi nol. Selanjutnya, graf pembagi nol dari gelanggang komutatif telah dibahas oleh Anderson & Livingston (1999) yang kemudian dilanjutkan peneltian sifat-sifat graf pembagi nol dari gelanggang komutatif oleh Setyowati, Wicaksono dan Sholeha (2013) dalam jurnal berjudul "Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi-nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan".

Selanjutnya, Chattopadhyay & Patra (2019) juga telah mengkaji struktur graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ secara general. Dari hasil penelitian-penelitian tersebut, penulis ingin mengkaji lebih lanjut mengenai graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{n,}$ untuk n didefinisikan secara khusus sebagai dekomposisi perkalian dari bilangan prima. Selanjutnya, masalah yang muncul dalam pembahasan mengenai bentuk graf pembagi nol adalah menentukan pola umum dari bentuk graf tersebut, sekaligus menentukan pola umum jumlah simpul, jumlah sisi, dan jumlah derajat semua simpul dari graf yang terbentuk tersebut.

Oleh karena itu, penulis akan melanjutkan dari penelitian tentang graf pembagi nol dari penelitian-penelitian sebelumnya dengan mengkaji tentang pola umum dari bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisi, dan jumlah derajat semua simpul dari graf graf pembagi nol gelanggang bilangan bulat modulo n $(\mathbb{Z}_n)$ untuk n merupakan dekomposisi perkalian dari bilangan prima atau $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima.

B. Tinjauan Pustaka

1) Gelanggang

Definisi 1.1 (Misri, 2010)

Sebuah himpunan tak kosong R terhadap operasi penjumlahan (+) dan perkalian (×) dikatakan gelanggang jika memenuhi:

1. $(R,+)$ membentuk grup komutatif (abelian) yaitu memenuhi:
   a. Sifat asosiatif yaitu jika memenuhi $a+(b+c) = (a+b)+c$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R.
   b. Terdapat unsur 0 di R sehingga $0+a = a+0$ untuk setiap a unsur di R.
   c. Terdapat balikan dari a yaitu $-a$ sehingga $a+(-a)=(-a)+a=0$ untuk setiap a unsur di R.
   d. Sifat komutatif, yaitu jika memenuhi $a+b = b+a$ untuk setiap a dan b unsur-unsur di R.
2. $(R, \times)$ memenuhi sifat asosiatif, yaitu $a(bc) = (ab)c$ untuk setiap a, b dan c unsur-unsur di R.

3. (R,+, ×) memenuhi sifat distributif, yaitu $(a+b)c = ac+bc$ dan $a(b+c) = ab+ac$ untuk setiap *a, b* dan *c* unsur-unsur di *R*.

Jika gelanggang *R* memuat unsur kesatuan $1 \neq 0 \in R$ dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk setiap $a \in R$, maka *R* disebut gelanggang dengan unsur satuan. Jika untuk setiap *a* dan *b* unsur-unsur di *R* berlaku $ab = ba$ maka gelanggang *R* disebut gelanggang komutatif.

Definisi 1.2 (Pangabean, 2015)

Jika R gelanggang komutatif maka $a \neq 0$, $a \in R$ dikatakan pembagi nol jika terdapat $b \in R$, $b \neq 0$ sedemikian sehingga $ab = 0$.

Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat tidak mempunyai pembagi nol. Tetapi $\overline{2}$ dan $\overline{3}$ adalah pembagi nol pada $\mathbb{Z}_6$. Pembagi lainnya adalah $\overline{4}$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_6$ adalah gelanggang komutatif dengan pembagi nol.

Definisi 1.3 (Pangabean, 2015)

Suatu gelanggang komutatif dengan elemen satuan *e* dengan $e \neq 0$ dan tidak mempunyai pembagi nol disebut daerah integral (integral domain).

Sebagai contoh, gelanggang bilangan bulat, gelanggang bilangan Rasional dan gelanggang bilangan real dengan penjumlahan dan perkalian bilangan bulat adalah sebuah integral domain atau daerah integral.

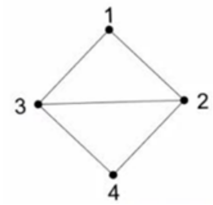
2) Graf

Definisi 1.4 (Munir, 2016)

Graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan (*V*,*E*), ditulis dengan notasi $G = (V,E)$, yang dalam hal ini *V* adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan *E* adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Dari definisi tersebut, diketahui bahwa *V* tidak boleh kosong, sedangkan *E* boleh kosong, sehingga sebuah graf dimungkinkan tidak memiliki sisi, tetapi harus memiliki minimal satu simpul. Graf yang hanya memiliki satu simpul dan tidak memiliki sisi disebut graf trivial.

Simpul pada graf dinyatakan dengan huruf kecil atau angka, sedangkan sisi yang menguhungkan simpul u dan v dalam graf dinyatakan (*u, v*) atau dengan lambang *e1, e2*, … dengan kata lain, *e* adalah sisi yang menghubungkan simpul *u* dan *v* dan dinyatakan $e = (u, v)$.



Gambar 1
Graf Sederhana

Gambar 1 adalah graf dengan simpul *V* dan sisi *E*, dengan *V* dan *E* secara berurutan sebagai berikut.

V = {1,2,3,4}

E = {(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)}

Jumlah simpul pada graf disebut kardinalitas graf dan dinyatakan dengan |*V*|, dan jumlah sisi dinyatakan dengan |*E*|. Pada Gambar 1Gambar , |V| = 4 dan |E| = 5.

Definisi 1.5 (Munir, 2016)

Graf sederhana merupakan graf yang tidak memiliki sisi gelang atau sisi ganda.

Contoh graf sederhana adalah pada Gambar 1.

Definisi 1.6 (Munir, 2016)

Derajat suatu simpul pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang beririsan dengan simpul tersebut

Notasi: *d(v)* menyatakan derajat simpul *v*. Pada Gambar :

d (1) = 2

d (2) = 3

d (3) = 3

d (4) = 2

Lemma 1.1 (Jabat Tangan) (Munir, 2016)

Jumlah derajat semua simpul pada suatu graf adalah genap, yaitu dua kali jumlah sisi pada graf tersebut. jika *G* = (*V*, *E*), maka:

$$\sum_{v \in V} d(v)$$

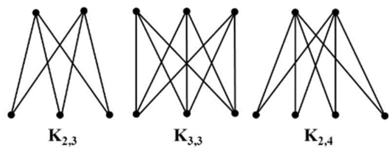
Berdasarkan Lemma jabat tangan, jumlah semua simpul pada Gambar adalah:

d (1) + d (2) + d (3) + d (4) = 2+3+3+2 = 10 = 2 × jumlah sisi = 2 × 5

3) Graf Bipartit

Definisi 1.7 (Munir, 2016)

Graf bipartit adalah graf G yang himpunan simpulnya terbagi menjadi 2 himpunan, yaitu himpunan V_1 dan V_2 yang setiap simpul di V_1 menghubungkan ke simpul V_2 dan membentuki sisi. Graf bipartit dinotasikan $G(V_1, V_2)$. Setiap pasang simpul di V_1(demikian pula dengan V_2) tidak bertetangga. Jika setiap simpul di V_1bertetangga dengan semua simpul di V_2 maka $G(V_{1,}V_2)$ dinamakan dengan graf bipartit lengkap (complete bipartite graph). Graf bipartit lengkap disimbolkan dengan $K_{m,n}$. Jumlah sisi dalam graf bipartit lengkap adalah mn.



Gambar 2
Graf Bipartit Lengkap

4) Graf Lengkap

Definisi 1.8 (Munir, 2016)

Graf lengkap adalah graf sederhana yang masing-masing simpulnya memiliki sisi ke semua simpul yang lain. Graf lengkap dengan *n* buah simpul disimbolkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari *n* buah simpul dirumuskan dengan $n(n-1)/2$. Setiap simpul pada K_n berderajat n-1.

5) Graf Pembagi Nol

Definisi 1.9 (Soleha, Setyowati, & Wicaksono, 2015)

Diberikan R merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan pembagi nol nya adalah $Z(R)$. sebuah graf pembagi nol, $\Gamma(R)$ adalah graf sederhana dengan simpul-simpulnya adalah anggota pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif tersebut. Kedua simpul misalkan x dan y dikatakan terhubung jika dan hanya jika $x \cdot y = 0$.

Sebagai contoh, gelanggang $\mathbb{Z}_3$ yang beranggotakan $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ tidak memiliki pembagi nol, sehingga gelanggang $\mathbb{Z}_3$ tidak memiliki bentuk graf pembagi nol atau grafnya adalah graf ksosong. Sementara itu, untuk gelanggang $\mathbb{Z}_6$ memiliki anggota pembagi nol yaitu $\bar{2}$, $\bar{3}$ dan $\bar{4}$ dengan relasi pasangan sebagai berikut.

$$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$$

$$\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$$

Dari anggota pembagi nol tersebut, diperoleh bentuk graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_6$ sebagai berikut.

Gambar 3
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_6$

Dari Gambar 3 terlihat bahwa graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_6$ berbentuk bipartit lengkap $K_{1,2}$.

Teorema 1.1 (Soleha, Setyowati, & Wicaksono, 2015)

$\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ adalah graf lengkap jika dan hanya jika $n = p^2$ untuk p adalah bilangan prima.

Bukti:

Karena elemen $\mathbb{Z}_{p^2}$ merupakan himpunan bilangan bulat modulo p^2 dan p adalah prima, maka $p^2 = 0$ dan tidak ada factor lain dari p^2 selain p. Diperoleh:

$$mn \cdot np = 0$$

untuk m,n bilangan bulat. Artinya, jika kita kalikan 2 elemen kelipatan p di $\mathbb{Z}_{p^2}$, hasilnya adalah 0, sehingga $Z(\mathbb{Z}_{p^2}) = \{p, 2p, 3p, \ldots, np\}$. Karena untuk setiap simpul di $Z(\mathbb{Z}_{p^2})$ merupakan annihilator (penghilang), maka setiap simpul di $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ terhubung dengan setiap simpul lainnya. Oleh sebab itu, $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^2})$ adalah graf pembagi nol lengkap dengan $|V(\mathbb{Z}_{p^2})| = p-1$.

C. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka, yaitu kegiatan ilmiah dengan melakukan pengamatan fenomena, kajian pustaka, pengumpulan, pengolahan dan analisis data dari pustaka untuk mendapatkan kesimpulan terhadap fenomena yang sedang diteliti (Subasman, 2020).

Dalam hal ini, penulis mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, artikel, dan lain-lain. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji sumber referensi yang berkaitan dengan gelanggang komutatif dan teori graf, serta jurnal atau artikel yang mengakaji topik graf pembagi nol dari gelanggang komutatif.

Selanjutnya, penulis merumuskan langkah-langkah penelitian yang dilakukan dalam mengkaji penelitian ini adalah:

1. Menunjukkan himpunan $\mathbb{Z}_n$ dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (×) merupakan suatu gelanggang.
2. Menunjukkan unsur pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p,q bilangan prima berdasarkan definisi unsur pembagi nol dari suatu gelanggang.
3. Menggambar beberapa contoh graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$

4. Menentukan bentuk graf, jumlah simpul, jumlah sisi, dan jumlah derajat semua simpul dari graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$.
5. Melalui beberapa contoh tersebut, kemudian dicari pola tertentu dan menggeneralisasikannya menjadi sebuah teorema melalui pembuktian dengan pendekatan induktif.

Pendekatan induktif yang dimaksud adalah proses mengorganisasikan fakta-fakta atau hasil-hasil pengamatan yang semula terpisah-pisah menjadi suatu rangkaian hubungan atau suatu generalisasi (Azwar, 2017).

2. PEMBAHASAN

A. Gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan Operasi Penjumlahan dan Perkalian

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{n-1}\}$ untuk *n* bilangan asli. Selanjutnya operasi penjumlahan (+) dan perkalian (×) pada $\mathbb{Z}_n$ didefinisikan sebagai $(a+b)$ dan $(a.b)$ untuk setiap $a,b \in \mathbb{Z}_n$. berdasarkan definisi 2.1.3, akan ditunjukkan bahwa himpunan Z_n untuk *n* bilangan asli terhadap operasi + dan × adalah gelanggang dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. ($\mathbb{Z}_n$, +) membentuk grup komutatif (abelian)

Akan ditunjukkan bahwa operasi + di $\mathbb{Z}_n$ adalah tertutup. Ambil sembarang a, $b \in \mathbb{Z}_n$ maka a+b = (a+b) $\in \mathbb{Z}_n$. karena (a+b) $\in \mathbb{Z}_n$ maka $\mathbb{Z}_n$ tertutup pada operasi +. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa operasi + bersifat assosiatif. Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$(a + b) + c \quad = (a + b + c)$

$= (a + (b + c))$

$= a + (b + c)$

Karena $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap a, b, c di $\mathbb{Z}_n$, maka $\mathbb{Z}_n$ assosiatif terhadap operasi penjumlahan.

Selanjutnya akan ditunjukkan terdapat unsur identitas terhadap operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_n$. Ambil sembarang $a \in \mathbb{Z}_n$ dan Pilih $0 \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$a + e = e + a = a$ *(identitas penjumlahan)*

$a + 0 = 0 + a = a$

$0 = e$

Karena $0 = e$ maka $\mathbb{Z}_n$ memiliki unsur identitas terhadap operasi penjumlahan yaitu 0, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_n$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa setiap unsur memiliki invers terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_n$. Ambil sembarang $a \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$a + (-a) = e$ *(invers penjumlahan)*

$a - a = e$

$0 = e$

Karena $a + (-a) = 0$ maka setiap unsur di $\mathbb{Z}_n$ memiliki invers, yaitu untuk setaip $a \in \mathbb{Z}_n$ memiliki invers $-a$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_n$ bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan. Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$a+b = (a+b)$

$a+b = (b+a)$

$a+b = b+a$

Karena $a+b = b+a$ untuk setiap a, b di $\mathbb{Z}_n$, maka $\mathbb{Z}_n$ komutatif terhadap penjumlahan

2. $(\mathbb{Z}_n, \times)$ memenuhi sifat assosiatif

Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_n$ bersifat assosiatif terhadap operasi perkalian. Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$(a\cdot b)\cdot c = (a\cdot b\cdot c)$

$= (a\cdot (b\cdot c))$

$= a\cdot (b\cdot c)$

Karena $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ untuk setiap a, b, c di $\mathbb{Z}_n$, maka $\mathbb{Z}_n$ assosiatif terhadap perkalian.

3. $(\mathbb{Z}_n, \times, +)$ memenuhi distributif

Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_n$ bersifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$

dan

$(a+b) \cdot c = (a\cdot c) + (b\cdot c)$

Karena $a\cdot(b+c) = (a\cdot b) + (a\cdot c)$ dan $(a+b)\cdot c = (a\cdot c) + (b\cdot c)$ untuk setiap a, b, c di $\mathbb{Z}_n$, maka $\mathbb{Z}_n$ memenuhi sifat distributive.

4. Terdapat unsur identitas pada operasi perkalian

Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_n$ memiliki unsur identitas terhadap operasi perkalian. Ambil sembarang $a \in \mathbb{Z}_n$ dan pilih $1 \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$a\cdot e = e\cdot a = a$ *(identitas perkalian)*

$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$

$1 = e$

Karena 1 = e maka $\mathbb{Z}_n$ memiliki unsur identitas terhadap perkalian yaitu 1, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_n$.

5. Komutatif terhadap operasi perkalian

Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_n$ bersifat komutatif terhadap operasi perkalian. Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{Z}_n$, maka:

$a\cdot b = (a\cdot b)$

$a\cdot b = (b\cdot a)$

$a\cdot b = b\cdot a$

Karena $a \cdot b = b \cdot a$ untuk setiap *a, b* di $\mathbb{Z}_n$, maka $\mathbb{Z}_n$ komutatif terhadap perkalian.

karena aksioma 1, 2 dan 3 terpenuhi, maka himpunan $\mathbb{Z}_n$ untuk *n* bilangan asli bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang, dan karena memenuhi aksioma 4 dan 5 makan $\mathbb{Z}_n$ disebut gelanggang komutatif dengan unsur satuan.

B. Notasi Graf Bipartit Lengkap

Berdasarkan Definisi 1.7, untuk notasi graf bipartit lengkap diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 1.1

$K_{m,n} = K_{n,m}$

Bukti:

Graf dengan *m* sebagai jumlah himpunan simpul V_1 dan *n* sebagai jumlah himpunan simpul V_2, memiliki bentuk graf yang sama dengan graf dengan *n* sebagai jumlah himpunan simpul V_1 dan *m* sebagai jumlah himpunan simpul V_2. Artinya, $G\,(V_1, V_2) = G\,(V_2, V_1)$.

C. Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p,q* Bilangan Prima

Batasan gelanggang yang menjadi pembahasan dalam penelitian ini adalah gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p = 2, 3, 5 dan q = 2, 3, 5, 7. Berdasarkan Definisi 1.2 , unsur pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p,q* bilangan prima di definisikan sebagai: unsur tak nol $a \in \mathbb{Z}_{pq}$ disebut pembagi nol jika terdapat unsur tak nol $b \in \mathbb{Z}_{pq}$ sedemikian sehingga $ab = 0$. Himpunan semua unsur pembagi nol dari gelanggang Z_{pq} untuk *p,q* baingan prima dinotasikan dengan $Z(\mathbb{Z}_{pq})$.

Kemudian berdasarkan Definisi 1.9, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p,q* bilangan prima dapat didefinisikan sebagai: $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p,q* bilangan prima merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan dan pembagi nol nya adalah $Z(\mathbb{Z}_{pq})$. sebuah graf pembagi nol $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf sederhana dengan simpul-simpulnya adalah anggota pembagi nol dari suatu gelanggang komutatif tersebut. Kedua simpul misalkan *a* dan $b \in Z(\mathbb{Z}_{pq})$ dikatakan terhubung jika dan hanya jika $a \cdot b = 0$.

1) Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ dengan q = 2, 3, 5, 7
   a. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ dengan $q = 2$

   Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang Z_4 memiliki 1 unsur pembagi nol yaitu $\bar{2}$ sedemikian sehingga:

   $\bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$

   Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_4$ adalah graf trivial, karena hanya memilik satu simpul yaitu $\bar{2}$ dan tidak memiliki sisi.

   b. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ dengan $q = 3$

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang Z_6 memiliki 3 unsur pembagi nol yaitu $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ sedemikian sehingga:

$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$

$\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_6$ adalah:

Gambar 4
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_6$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_6$ merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,2}$ karena simpul $\overline{3}$ terhubung langsung dengan simpul $\overline{2}$ dan $\overline{4}$.

c. Graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ dengan $q = 5$

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{10} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ memiliki 5 unsur pembagi nol yaitu $\overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{8}$ sedemikian sehingga:

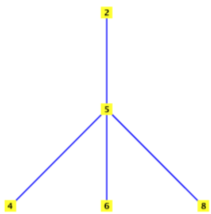
$\overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{0}$

$\overline{4} \cdot \overline{5} = \overline{0}$

$\overline{6} \cdot \overline{5} = \overline{0}$

$\overline{8} \cdot \overline{5} = \overline{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ adalah:



Gambar 5
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{10}$ merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,4}$ karena simpul $\overline{5}$ terhubung langsung dengan simpul $\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}$ dan $\overline{8}$.

d. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ dengan q = 7

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{14} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{14}$ memiliki 7 unsur pembagi nol yaitu $\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}$ sedemikian sehingga:

$\overline{2} \cdot \overline{7} = \overline{0}$

$\overline{4} \cdot \overline{7} = \overline{0}$

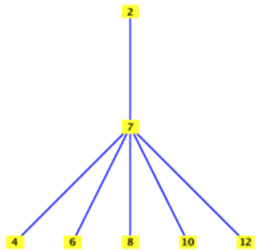
$\overline{6} \cdot \overline{7} = \overline{0}$

$\overline{8} \cdot \overline{7} = \overline{0}$

$\overline{10} \cdot \overline{7} = \overline{0}$

$\overline{12} \cdot \overline{7} = \overline{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{14}$ adalah:



Gambar 6
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{14}$

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{14}$ merupakan graf bipartit lengkap $K_{1,6}$ karena simpul $\overline{7}$ terhubung langsung dengan simpul $\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}$ dan $\overline{12}$.

Berdasarkan bentuk graf $\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_{10}$ dan $\mathbb{Z}_{14}$ di atas, dapat disimpulkan bahwa graf pembagi nol gelaggang $\mathbb{Z}_{2q}$ untuk q = 2, 3, 5, 7 adalah sebagai berikut:

Tabel 1
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$

Gelaggang $\mathbb{Z}_{2q}$	Bentuk Graf
q = 2	Trivial
q = 3	Bipartit lengkap $K_{1,2}$
q = 5	Bipartit lengkap $K_{1,4}$
q = 7	Bipartit lengkap $K_{1,6}$
q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{1,q-1}$

Dengan melihat Tabel 1 didapatkan teorema sebagai berikut.

Teorema 4.2

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ dengan q bilangan prima adalah bipartit lengkap $K_{1,\, q-1}$ untuk $q \neq 2$.

Bukti:

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{2q}$ = $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{2q-1}\}$ dengan q bilangan prima bersama operasi + dan operasi × merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{2q}) = \{\bar{2}, \bar{4}, \ldots, \overline{2q-2}, \bar{q}\}$. Berdasarkan definisi dari graf pembagi nol, maka diperoleh hubungan dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2q})$ yaitu $(2 \cdot a_i) \times q = 0$ untuk dan $a_i = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_{2q}$. Artinya, hanya simpul q yang terhubung langsung dengan simpul lainnya di $Z(\mathbb{Z}_{2q})$. Dengan demikian, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{2q})$ adalah graf biparit lengkap $K_{1,q-1}$ dengan q sebagai titik pusat.

2) Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ dengan q = 2, 3, 5, 7

a. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ dengan q = 2

Karena $\mathbb{Z}_{3\cdot 2} = \mathbb{Z}_{2\cdot 3}$, berdasarkan Teorema 2.1 dan Gambar maka bentuk graf pada gelanggang $Z_{3.2}$ memiliki bentuk graf bipartit lengkap $K_{2,1}$ karena simpul $\bar{2}$ dan $\bar{4}$ terhubung langsung dengan simpul $\bar{3}$.

b. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ dengan q = 3

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang Z_9 memiliki 2 unsur pembagi nol yaitu $\bar{3}$ dan $\bar{6}$ sedemikian sehingga:

$\bar{3} \cdot \bar{6} = \bar{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_9$ adalah:

Gambar 7
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_9$

Bentuk graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_9$ adalah graf lengkap K_2 atau graf bipartit lengkap $K_{1,1}$ dengan simpul $\bar{3}$ dan simpul $\bar{6}$ saling terhubung.

c. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ dengan q = 5

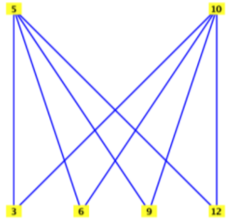
Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{15}$ memiliki 6 unsur pembagi nol yaitu $\bar{3}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{12}$ sedemikian sehingga:

$\bar{3} \cdot \bar{5} = \bar{0}$	$\bar{9} \cdot \bar{5} = \bar{0}$
$\bar{6} \cdot \bar{5} = \bar{0}$	$\overline{12} \cdot \bar{5} = \bar{0}$

$\bar{3} \cdot \overline{10} = \bar{0}$ $\bar{9} \cdot \overline{10} = \bar{0}$

$\bar{6} \cdot \overline{10} = \bar{0}$ $\overline{12} \cdot \overline{10} = \bar{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{15}$ adalah:



Gambar 8
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{15}$

Bentuk graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{15}$ merupakan graf bipatit lengkap $K_{2,4}$ karena terdapat simpul $\bar{5}$ dan $\overline{10}$ yang masing-masing terhubung langsung dengan simpul $\bar{3}$, $\bar{6}$, $\bar{9}$ dan $\overline{12}$.

d. Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ dengan q =7

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{21}$ = $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{21}$ memiliki 8 unsur pembagi nol yaitu $\bar{3}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$, $\bar{9}$, $\overline{12}$, $\overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{18}$ sedemikian sehingga:

$\bar{3} \cdot \bar{7} = \bar{0}$ $\bar{3} \cdot \overline{14} = \bar{0}$

$\bar{6} \cdot \bar{7} = \bar{0}$ $\bar{6} \cdot \overline{14} = \bar{0}$

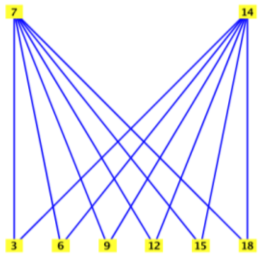
$\bar{9} \cdot \bar{7} = \bar{0}$ $\bar{9} \cdot \overline{14} = \bar{0}$

$\overline{12} \cdot \bar{7} = \bar{0}$ $\overline{12} \cdot \overline{14} = \bar{0}$

$\overline{15} \cdot \bar{7} = \bar{0}$ $\overline{15} \cdot \overline{14} = \bar{0}$

$\overline{18} \cdot \bar{7} = \bar{0}$ $\overline{18} \cdot \overline{14} = \bar{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{21}$ adalah:



Gambar 9
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{21}$

Bentuk graf pembagi nol geanggang $\mathbb{Z}_{21}$ merupakan graf bipatit lengkap $K_{2,6}$ karena terdapat simpul $\bar{7}$ dan $\overline{14}$ yang masing-masing terhubung langsung dengan simpul $\bar{3}$, $\bar{6}$, $\bar{9}$, $\overline{12}$, $\overline{15}$ dan $\overline{18}$.

Berdasarkan bentuk graf $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_9$, $\mathbb{Z}_{15}$ dan $\mathbb{Z}_{21}$ di atas, dapat disimpulkan bahwa graf pembagi nol gelaggang $\mathbb{Z}_{3q}$ untuk q = 2, 3, 5, 7 adalah sebagai berikut:

Tabel 2
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$

Gelaggang $\mathbb{Z}_{3q}$	Bentuk Graf
q = 2	Bipartit lengkap $K_{2,1}$
q = 3	Lengkap K_2 atau Bipartit lengkap $K_{1,1}$
q = 5	Bipartit lengkap $K_{2,4}$
q = 7	Bipartit lengkap $K_{2,6}$
q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{2,q-1}$

Dengan melihat Tabel 2 didapatkan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.3

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ dengan q bilangan prima adalah bipartit lengkap $K_{2,\,q-1}$ untuk $q \neq 3$.

Bukti:

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{3q} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{3q-1}\}$ dengan q bilangan prima bersama operasi + dan operasi × merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{3q}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{3q}) = \{\overline{3}, \overline{6}, \ldots, \overline{3q-3}, \overline{q}, \overline{2q}\}$. Berdasarkan definisi dari graf pembagi nol, maka diperoleh hubungan dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{2q})$ yaitu $(3 \cdot a_i) \times q = 0$ dan $(3 \cdot a_i) \times 2q = 0$ untuk $a_i = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_{3q}$. Artinya, simpul q dan $2q$ terhubung langsung dengan semua simpul lainnya di $Z(\mathbb{Z}_{3q})$. Dengan demikian, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{3q})$ adalah graf biparit lengkap $K_{2,q-1}$.

3) Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ dengan q = 2, 3, 5, 7

a. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ dengan q = 2

Karena $\mathbb{Z}_{5 \cdot 2} = \mathbb{Z}_{2 \cdot 5}$, berdasarkan Teorema 2.1 dan Gambar maka bentuk graf pada gelanggang $\mathbb{Z}_{5.2}$ memiliki bentuk graf bipartit lengkap $K_{4,1}$ karena simpul $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$ dan $\overline{8}$ terhubung langsung dengan simpul $\overline{5}$.

b. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ dengan q = 3

Karena $\mathbb{Z}_{5 \cdot 3} = \mathbb{Z}_{3 \cdot 5}$, berdasarkan Teorema 2.1 dan Gambar maka bentuk graf pada gelanggang $\mathbb{Z}_{5.3}$ memiliki bentuk graf bipatit lengkap $K_{4,2}$ karena terdapat simpul $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{9}$ dan $\overline{12}$ yang masing-masing terhubung langsung dengan simpul $\overline{5}$ dan $\overline{10}$.

c. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ dengan q = 5

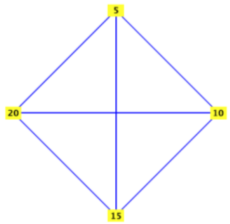
Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{25} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang Z_{21} memiliki 4 unsur pembagi nol yaitu $\overline{5}$, $\overline{10}$, $\overline{15}$ dan $\overline{20}$ sedemikian sehingga:

$\overline{5} \cdot \overline{10} = \overline{0}$ | $\overline{10} \cdot \overline{15} = \overline{0}$

$\overline{5} \cdot \overline{15} = \overline{0}$ | $\overline{10} \cdot \overline{20} = \overline{0}$

$\overline{5} \cdot \overline{20} = \overline{0}$ | $\overline{15} \cdot \overline{20} = \overline{0}$

Jadi, graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{25}$ adalah:



Gambar 10
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{25}$

Bentuk graf pembagi nol geanggang $\mathbb{Z}_{25}$ merupakan graf lengkap K_4 karena simpul $\overline{5}$, $\overline{10}$, $\overline{15}$ dan $\overline{20}$ saling terhubung satu sama lain.

d. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ dengan $q = 7$

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{35} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}\}$ bersama dengan operasi + dan × adalah gelanggang. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{35}$ memiliki 10 unsur pembagi nol yaitu $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{10}, \overline{14}$, $\overline{15}$, $\overline{20}, \overline{21}, \overline{25}$, $\overline{28}$, $\overline{30}$ sedemikian sehingga:

$\overline{5} \cdot \overline{7} = \overline{0}$ | $\overline{5} \cdot \overline{21} = \overline{0}$

$\overline{10} \cdot \overline{7} = \overline{0}$ | $\overline{10} \cdot \overline{21} = \overline{0}$

$\overline{15} \cdot \overline{7} = \overline{0}$ | $\overline{15} \cdot \overline{21} = \overline{0}$

$\overline{20} \cdot \overline{7} = \overline{0}$ | $\overline{20} \cdot \overline{21} = \overline{0}$

$\overline{25} \cdot \overline{7} = \overline{0}$ | $\overline{25} \cdot \overline{21} = \overline{0}$

$\overline{30} \cdot \overline{7} = \overline{0}$ | $\overline{30} \cdot \overline{21} = \overline{0}$

$\overline{5} \cdot \overline{14} = \overline{0}$ | $\overline{5} \cdot \overline{28} = \overline{0}$

$\overline{10} \cdot \overline{14} = \overline{0}$ | $\overline{10} \cdot \overline{28} = \overline{0}$

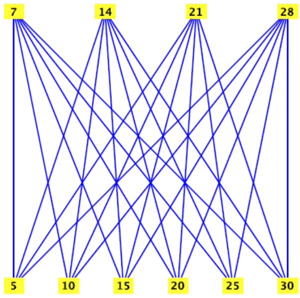
$\overline{15} \cdot \overline{14} = \overline{0}$ | $\overline{15} \cdot \overline{28} = \overline{0}$

$\overline{20} \cdot \overline{14} = \overline{0}$ | $\overline{20} \cdot \overline{28} = \overline{0}$

$\overline{25} \cdot \overline{14} = \overline{0}$ | $\overline{25} \cdot \overline{28} = \overline{0}$

$\overline{30} \cdot \overline{14} = \overline{0}$ | $\overline{30} \cdot \overline{28} = \overline{0}$

Jadi, bentuk graf pembaginol dari gelanggag $\mathbb{Z}_{35}$ adalah:



Gambar 11

Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{35}$

Bentuk graf pembagi nol geanggang $\mathbb{Z}_{35}$ merupakan graf bipatit lengkap $K_{4,6}$ karena terdapat simpul $\overline{7}$, $\overline{14}$, $\overline{21}$, $\overline{28}$ yang masing-masing terhubung langsung dengan simpul $\overline{5}$, $\overline{10}$, $\overline{15}$, $\overline{20}$, $\overline{25}$ dan $\overline{30}$.

Berdasarkan bentuk graf $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_{15}$, $\mathbb{Z}_{25}$ dan $\mathbb{Z}_{35}$ di atas, dapat disimpulkan bahwa graf pembagi nol gelaggang $\mathbb{Z}_{5q}$ untuk q = 2, 3, 5, 7 adalah sebagai berikut:

Tabel 3

Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$

Gelaggang $\mathbb{Z}_{5q}$	Bentuk Graf
q = 2	Bipartit lengkap $K_{4,1}$
q = 3	Bipartit lengkap $K_{4,2}$
q = 5	Lengkap K_4
q = 7	Bipartit lengkap $K_{4,6}$
q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{4,q-1}$

Dengan melihat Tabel didapatkan teorema sebagai berikut.

Teorema 2.4

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ dengan q bilangan prima adalah bipartit lengkap $K_{4,\, q-1}$ untuk $q \neq 5$.

Bukti:

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{5q} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{5q-1}\}$ dengan q bilangan prima bersama operasi + dan operasi × merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{5q}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{3q}) = \{\overline{5}, \overline{10}, \ldots, \overline{5q-5}, \overline{q}, \overline{2q}, \overline{3q}, \overline{4q}\}$. Berdasarkan definisi dari graf pembagi nol, maka diperoleh hubungan dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ yaitu $(5 \cdot a_i) \times q = 0$, $(5 \cdot a_i) \times 2q = 0$, $(5 \cdot a_i) \times 3q = 0$ dan $(5 \cdot a_i) \times 4q = 0$ untuk $a_i = \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_{5q}$. Artinya, simpul q, $2q$, $3q$ dan $4q$ terhubung langsung dengan semua simpul lainnya di $Z(\mathbb{Z}_{5q})$. Dengan demikian, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{5q})$ adalah graf biparit lengkap $K_{4,q-1}$.

Berdasarkan Tabel 1 kita memperoleh teorema bahwa bentuk graf pembagi nol dari gelanggnag bilangan bulat modulo *2q* adalah $K_{1,q-1.}$ Berdasarkan Tabel kita memperoleh teorema bahwa bentuk graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo *3q* adalah $K_{2,q-1.}$ Berdasarkan Tabel kita memperoleh teorema bahwa bentuk graf pembagi nol dari gelanggang bilangan bulat modulo *5q* adalah $K_{4,q-1.}$

Untuk itu, dengan menyatukan tabel graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{2q}$, $\mathbb{Z}_{3q}$ dan $\mathbb{Z}_{5q}$ menjadi satu tabel baru, diperoleh tabel graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p,q* bilangan prima sebagai berikut:

Tabel 4
Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$

Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$		Bentuk Graf
p = 2	q = 2	Trivial
	q = 3	Bipartit lengkap $K_{1,2}$
	q = 5	Bipartit lengkap $K_{1,4}$
	q = 7	Bipartit lengkap $K_{1,6}$
	q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{1,q-1}$
p = 3	q = 2	Bipartit lengkap $K_{2,1}$
	q = 3	Lengkap K_2 atau Bipartit lengkap $K_{1,1}$
	q = 5	Bipartit lengkap $K_{2,4}$
	q = 7	Bipartit lengkap $K_{2,6}$
	q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{2,q-1}$
p = 5	q = 2	Bipartit lengkap $K_{4,1}$
	q = 3	Bipartit lengkap $K_{4,2}$
	q = 5	Lengkap K_4
	q = 7	Bipartit lengkap $K_{4,6}$
	q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{4,q-1}$
p = bilangan prima lainnya	q = bilangan prima lainnya	Bipartit lengkap $K_{p-1,q-1}$

Dengan melihat Tabel di atas diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 2.5

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p,q* bilangan prima adalah bipartit lengkap $K_{p-1,\, q-1}$ untuk $p \neq q$.

Bukti:

Diketahui himpunan $\mathbb{Z}_{pq} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{pq-1}\}$ untuk *p,q* bilangan prima bersama operasi + dan operasi × merupakan gelanggang. Himpunan semua unsur pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ adalah $Z(\mathbb{Z}_{pq}) = \{\bar{p}, \overline{2p}, \ldots, \overline{(q-1)p}, \bar{q}, \overline{2q} \ldots, \overline{(p-1)q}, \}$. Berdasarkan definisi dari graf pembagi nol, maka diperoleh hubungan dari $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ yaitu $(p{\cdot}a_i) \times (q{\cdot}b_i) = 0$ untuk $a_i = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{q-1} \in \mathbb{Z}_{pq}$ dan $b_i = \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \ldots, \overline{p-1} \in \mathbb{Z}_{pq}$. Derajat simpul $p{\cdot}a_i$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah *q-1*, karena ada *q-1* simpul yang terhubung langsung dengan simpul $p{\cdot}a_i$. Sementara itu, derajat simpul $q{\cdot}b_i$ pada graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah *p-1*, karena ada *p-1* simpul yang terhubung langsung dengan simpul $q{\cdot}b_i$. Dengan demikian, graf $\Gamma(\mathbb{Z}_{pq})$ adalah graf biparit lengkap $K_{p-1,q-1}$.

4) Graf Pembagi Nol dari Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p, q* Bilangan Prima dan *p=q*

Berdasarakan Definisi 1.8, Teorema 1.1 danTabel , diperoleh:

Teorema 2.6

Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p, q* bilangan prima dan $p = q$ adalah bipartit lengkap K_{p-1}..

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.8 diketahui graf lengkap K_n untuk *n* banyaknya simpul, dan berdasarkan Teorema 1.1 diperoleh betuk graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{p^2}$ adalah graf lengkap K_{p-1} untuk *p* bilangan prima. Berdasarkan teorema 3.1 juga diketahui $p^2 = pp$, jika $p = q$ maka berlaku $p^2 = pq$. Untuk itu, berlaku juga $\mathbb{Z}_{p^2} = \mathbb{Z}_{pq}$. Dengan demikian, Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p, q* bilangan prima dan $p = q$ adalah bipartit lengkap K_{p-1}.

D. Jumlah Sisi Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$

Berdasarkan Definisi 1.7 dan Teorema 2.5 diperoleh:

Teorema 2.7

Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p, q* bilangan prima dan $p \neq q$ memiliki jumlah sisi $(p\text{-}1) \times (q\text{-}1)$.

Bukti:

Diketahui bentuk graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ dari Teorema 2.5 adalah graf bipartit lengkap $K_{p-1,q-1,}$ berdasarkan Definisi 1.7 maka jumlah sisi graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk *p, q* bilangan prima dan $p \neq q$ adalah $(p\text{-}1) \times (q\text{-}1)$.

E. Jumlah Simpul Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$

Berdasarkan definisi 1.7 dan teorema 2.5 diperoleh:

Teorema 2.8

Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ memiliki jumlah simpul (p-1) + (q-1).

Bukti:

Berdasarkan Definisi 1.7, jika m merupakan jumlah simpul di V_1 dan n merupakan jumlah simpul di V_2 pada graf bipartit lengkap K_{mn}, maka jumlah simpul pada graf bipartit lengkap K_{mn} adalah $m + n$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.5, jumlah simpul graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ adalah (p-1) + (q-1).

F. Jumlah Derajat Seluruh Simpul Graf Pembagi Nol Gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$

Berdasarkan Lemma 1.1 dan Teorema 2.7 diperoleh:

Teorema 2.9

Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ memiliki jumlah derajat seluruh simpul 2((p-1) × (q-1)).

Bukti:

Diketahui dari Teorema 2.7 jumlah sisi sisi graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ adalah (p-1) × (q-1). Berdasarkan Lemma 1.1, diperoleh jumlah jumlah derajat seluruh simpul **g**raf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ adalah 2((p-1) × (q-1)).

3. PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab IV, diperoleh kesimpulan-kesimpulan sebagai berikut:

1. Bentuk graf pembagi nol dari gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p,q bilangan prima adalah bipartit lengkap $K_{p-1,\, q-1}$ untuk $p \neq q$.
2. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ memiliki jumlah sisi (p-1) × (q-1).
3. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ memiliki jumlah simpul (p-1) + (q-1).
4. Graf pembagi nol gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$ untuk p, q bilangan prima dan $p \neq q$ memiliki jumlah derajat seluruh simpul 2((p-1) × (q-1)).

B. Saran

Dalam penulisan penelitian ini hanya terbatas pada jenis gelangang yang diteliti, yaitu gelanggang $\mathbb{Z}_{pq}$. Oleh karena itu, penulis memberikan saran kepada pembaca untuk meneliti pola graf dari jenis gelanggang yang lain. Selain itu, masih ada banyak yang perlu di eksplorasi dari pola suatu graf seperti *girth*, jarak eksentrisitas, radius, diameter dan sebagainya. Oleh karena itu, penulis juga memiliki saran kepada pembaca untuk meneliti hal tersebut terhadap graf pembagi nol dari suatu gelanggang.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ucapkan terima kasih kepada dosen pembimbing, yaitu Bapak Muhamad Ali Misri, M.Si selaku dosen pembimbing 1 dan Ibu Herlinda Nurafwa Sofhya, M.Si selaku dosen pembimbing 2 yang telah memberikan arahan dan motivasinya dalam menyelesaikan penyusunan tulisan ini. Penulis juga ucapkan terima kasih kepada keluarga, saudara dan teman-teman penulis karena telah memberikan dukungan baik materi maupun motivasi.

REFERENSI

Anderson, D. D., & M.Naseer. (1993). Beck's Coloring Of a Commutative Rings. *Journal of Algebra, 159*, 500-514.

Anderson, D. F., & Livingston, P. S. (1999). The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring. *Journal Of Algebra* , 434-447.

Azwar, S. (2017). *Metode Penelitian Psikologi Edisi II.* Yogyakarta: Pustaka Belajar.

Beck, I. (1988). Coloring Of Commutative Rings. *Journal Of Algebra, 116*, 208-226.

Chattopadhyay, S., & Patra, K. L. (2019). Laplacian eigenvalues of the zero divisor graph of the ring Zn. *Linear Algebra and its Applications*, 267-286.

Misri, M. A. (2010). *Submodul Prima Pada Modul Perkalian.* Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Munir, R. (2016). *Matematika Diskri.* Bandung: Informatika.

Pangabean, E. M. (2015). *Struktur Aljabar II.* Sumatera Utara: Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara.

Soleha, Setyowati, D. W., & Wicaksono, S. A. (2015). Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*.

Subasman, I. (2020). Penelitian Studi Pustaka Untuk Budang Pendidikan dan Sosial Keagamaan. *ResearchGate*.

Wicaksono, S. A., & Soleha. (2013). Kajian Sifat-Sifat Graf Pembagi Nol dari Ring Komutatif dengan Elemen Satuan. *Jurnal Sains dan Seni Pomits*, 2337-3250.