NURJATI JOURNAL OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL SCIENCES

Publikasi Online : Oktober 2021
Volume 1, Nomor 2, 2021. Hal. 130 – 145

Journal homepage: **www.syekhnurjati.ac.id/jurnal/index.php/njmms**
email: **njmms@syekhnurjati.ac.id** e-issn: 2776-0383

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR KOMPLEKS MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI LU

Adam Sopiyndi
Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, IAIN Syekh Nurjati Cirebon
Jl. By Pass Sunyaragi Perjuangan, Kode Pos 45132, Cirebon, Indonesia
Sopiyandi12adam@mail.syekhnurjati.ac.id

Abstrak

In real cases, a system of linear equations is often applied to various kinds of problems, with the development of this theory also the development of new methods to determine more effective solutions. usually another form of a system of linear equations is denoted as Ax=b. In addition, the work of this study aims to in addition to fostering curiosity and to find solutions for solving complex number linear equation systems using LU Decomposition can also assist future researchers in solving problems that have similar topics. The method that will be applied is in the form of a literature study with a view to strengthening the discussion in the future. In addition, the discussion of the study taken will only focus on complex numbers spl. And with this study, it is hoped that it will be useful, whether it is adding insight or adding new, more creative researchers regarding the discussion of SPL using other methods, especially in complex numbers.

Kata Kunci: SPL, Complex Numbers, OBE, Matrix, LU Decomposition, and Solution

1. PENDAHULUAN

Sistem persamaan linear terbentuk dari beberapa persamaan linear dan persamaan linear terdiri dari beberapa koefisien yang mewakili ukuran bidang datar/bangung ruang dan saling dikaitkan oleh operasi $(+)$ dan $(-)$. Pada permasalahan sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan bentuk umum yang dinotasikan $Ax = b$, dari bentuk umum ini metode yang digunakan sangatlah banyak agar memperoleh sebuah solusi. Metode adalah suatu teknik dalam proses penyelesaian masalah itu sendiri. hanya saja dari sekian banyak metode belum tentu semuanya efektif terhadap masalah yang diberikan, karena setiap masalah pada sistem persamaan linear dikelompokan berdasarkan jenis-jenis spl yang mempunyai karakteristiknya tersendiri. Contohnya ketika terdapat persamaan dengan determinan sama dengan nol, maka metode seperti aturan cramer atau sarrus tidak berlaku, begitu pula dengan sistem persamaan interval linear jika menggunakan eliminasi gauss-jordan tentunya akan sulit.

Selain jenis spl interval yang disebutkan tadi, terdapa juga jenis spl bilangan kompleks dan bilangan real seperti yang dikutip peneliti dari Aryani & Yulianti (2012, hal. 1) yaitu metode OBE adalah metode yang sangat dasar sekali dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan linear real maupun sistem persamaan linear kompleks. Dari spl kompleks inilah yang nantinya akan dibahas pada artikel ini. Sebagai catatan bentuk bilangan kompleks umumnya dituis dengan $z = a + bi$ atau $z = (a, b)$, utnuk $a = Re(z)$ dan $b = Im(z)$.

Sehubungan dengan itu, Agar dapat tersetruktur dan sistematis dalam artikel ini akan dijabarkan secara urut yaitu pertama peneliti akan membahas sistem persamaan linear, bilangan kompleks, operasi pada bilangan kompleks dan bentuk umum spl bilangan kompleks, metode dekomposisi LU beserta peneliti terdahulu, kemudian pemecahan spl bilangan kompleks dengna diawali oleh langkah-langkah penyelesaian, terakhir kesimpulan dan saran serta ditutup oleh ucapan terimakasih .

Sistem Persamaan Linear

Kartika (2018, hal. 2) menyatakan bahwa perhitungan sistem persamaan linear sudah digunakan sejak 4000 tahun yang lalu atau pada masa babylonial (babel). Adapun penyelesaian babel terkait persamaan linear dapat ditunjukan pada tablet YBC 4652 dengan bertulisan "*i found a stone, (but) did not weigh it: (after) weighed (out) 8 times its weight, added 3gin one-third of one-thirteenth i multiplied by 21, add (it), and then i weighed (it): 1 ma-na. What was the origin(al weight) of the stone? The origin (al weight) of the stone was* $4\frac{1}{2}$ *gin.* Jika ini diterjemahkan kedalam persamaan modern dengan memisalkan x sebagai berat batu, maka: $[1\ ma - na = 60\ gin]$

$$8x + 3 + \frac{7}{13}(8x + 3) = 60$$

$$104x + 39 + 56x + 21 = 780$$

$$x = \frac{720}{160} = 4{,}5$$

Meskipun babel menerapkan sistem persamaan linear pertama kali namun sekitar abad ke 17 istilah sistem persamaan linear mulai dikenalkan oleh rene decartes. Selanjutnya ada beberapa penemu metode dalam penentuan spl menggunakan matriks diantaranya, Arthur Cayley(1859) merupakan ilmuwan pertama yang menemukan rumus matriks, sedangkan penerapan spl kebentuk matriks adalah karl friedich gauss(1811) yang dikenal sebagai metode eliminasi gauss. Menurut wilhelm jordan metode gauss kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah spl. Sehingga metode ini disempurnakan wilhelm jordan(1988) menjadi metode gauss-jordan, terakhir gabriel cramer ilmuawan yang menemukan aturan cramer(1750) karena dia berhasil mengembangkan determinan ke ordo *nxn*, meskipun pada saat itu konsep determinan ditemukan oleh leibniz di tahun 1963.

Selanjutnya definisi spl, Menurut Yusnita & Novtiar (2017, hal. 60) secra umum sistem persamaan linear yang memuat m persamaan dan n variabel adalah:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = & g_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = & g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = & g_n \end{array} \quad \textbf{[1]}$$

Sebagai catatan pemecahan spl memiliki 3 kemungkinan bentuk solusi yang nantinya diperoleh, solusi yang dimaksud menurut Sari (2012, hal. 8) yaitu solusi tunggal, tidak ada solusi atau banyak solusi. Dari ketiga solusi ini, agar diketahui bentuk dari hasil spl yang didapatkan maka pertaman persamaan [1] diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{2}]$$

Atau dapat ditulis

$$Ax = g \qquad [\mathbf{3}]$$

Keterangan.

$A = a_{ij}$ atau didefinisikan sebagai matriks koefisien ordo *mxn*

$x = x_n$ atau didefinisikan sebagai matriks variabel ordo *1xn*

$g = g_n$ atau didefinisikan sebagai matriks konstanta ordo *1xn*

Jika sudah mensubstitusikan ke persamaan [2] dengan menggunakan metode spl yang ada maka bentuk solusi yang diperoleh dapat diketahui dari antara ketiga bentuk solusi di atas.

Bilangan kompleks

pada tahun 1545 seorang ilmuwan renaissance, girolamo cardano, mengkombinasikan solusi al-khawarizmi dengan geometri untuk memecahkan persamaan kuadrat. Dia memperbolehkan solusi negatif dan bahkan akar kuadrat angka negatif yang menghasilkan bilangan kompleks. Secara istilah bilangan kompleks didefinisikan sebagai semua besaran yang ditulis kedalam $z = a + bi$ dan diperjelas oleh Hasmita (2014, hal. 11) bahwa $a = Re(z)$ atau bagian real dari bilangan kompleks dan $b = Im(z)$ atau bagian imajiner dari bilangan kompleks. Selain itu, ada juga yang menyatakan bilangan kompleks jika diterapkan sebagai pasangan berurutan $z = (a, b)$ (Erman & Turmudi, 1993, hal. 46). Dengan $i = \sqrt{-1}\ atau\ i^2 = -1$.

Sebelum masuk keoperasi bilangan kompleks akan ditunjukan terlebih dahulu mengenai 4 kondisi yang mungkin terjadi

Misal $x = a$ dan $y = b$; $\quad a, b \in R$. Maka bilangan kompleksnya:

$z = a + bi$ (bentuk lengkap)

Misal $x = a$ dan $y = 0$; $\quad a, b \in R$. Maka bilangan kompleksnya:

$z = a + 0i = a$ (bilangan real)

Misal $x = 0$ dan $y = b$; $\quad a, b \in R$. Maka bilangan kompleksnya:

$z = 0 + bi = bi$ (bilangan imajiner)

Misal $x = 0$ dan $y = 1$; $\quad a, b \in R$. Maka bilangan kompleksnya:

$z = 0 + (1)i = i$ (satuan imajiner)

Operas Uner bilangan kompleks (Hw, 2015, hal. 2)

konjugat atau sekawan ($\overline{z}$)

Misalkan $z = a + bi$ sehingga konjugatnya $\overline{z} = a - bi$

Negatif

Misalkan $z = a + bi$ sehingga $-z = -(a + bi) \Rightarrow -z = -a - bi$

Invers

Misalkan $z = a + bi$ sehingga $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Misal $z_1 = a_1 + b_1 i$ dan $z_2 = a_2 + b_2 i$, maka berlaku

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a^2 + b^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a^2 + b^2}$

$z_1 + (-z_1) = 0$

$z_1 z_1^{-1} = 1$

Berikutnya akan disampaikan mengenai bentuk umum sistem persamaan linear bilangan kompleks, meurut erianti (2013, hal. II-6) spl kompleks adalah spl dengan koefisien dan konstantanya merupakan bilangan kompleks. Berdasarkan definisi tersebut untuk persamaan [1] akan berubah menjadi:

$$\begin{matrix} (a_{11} + ib_{11})x_1 + (a_{12} + ib_{12})x_2 + \cdots + (a_{1n} + ib_{1n})x_n = a_1 + ib_1 \\ (a_{21} + ib_{21})x_1 + (a_{21} + ib_{21})x_2 + \cdots + (a_{2n} + ib_{2n})x_n = a_2 + ib_2 \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ (a_{n1} + ib_{n1})x_1 + (a_{n2} + ib_{n2})x_2 + \cdots + (a_{nn} + ib_{nn})x_n = a_n + ib_n \end{matrix}$$

Karena bentuk spl dari $Ax = b$ bilangan real ataupun bilangan kompleks sama saja strukutrnya namun yang membedakan hanya pada bentuk entri-entri dari sistem persamaan linear itu sendiri. Oleh karena itu, jika ingin diubah ke persamaan [2] maka $A = a_{ij} + ib_{ij}$ dan $g = a_n + ib_n$.

Dekomposisi LU

Menurut sahid (2004, hal. 80) Jika matriks A dapat difaktorisasikan menjadi menjadi matriks segitiga bawah (L) dan matriks segitiga atas (U) atau $A = LU$. Sehingga persamaan [3] menjadi

$$LUx = g$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} [\mathbf{4}]$$

Keterangan

L adalah matriks segitiga bawah dengan ketentuan diagonal utama bernilai 1 dan

U berupa matriks esselon baris atau matriks segitiga atas

Adapun prosesnya, untuk membentuk persamaan [4] dapat dilakukan dengan melakukan operasi pada matriks A di persamaan [3] atau yang lebih dikenal sebagai OBE

(Operasi Baris Elementer). Menurut Sr, Triono, & Anapranata (2019, hal. 54) untuk OBE sendiri memiliki aturan yang berlaku yaitu (1) menukar posisi dua buah persamaan(dua baris matriks augmented), (2) menambah sebuah persamaan (baris matriks augmnted) dengan suatu kelipatan persamaan (baris lain), seperti yang diungkapkan oleh Abdullah, Ismail, & Suprawoto (hal. 6) bahwa matriks L berperan sebagai catatan dari operasi yang diperlukan (OBE) untuk membuat matriks A masuk ke dalam matriks segitiga atas U. Tujuan dari proses OBE adalah untuk membentuk matriks eselon baris U atau matriks segitiga atas, sedangkan matriks L adalah koefisian dari kelipatan baris lain. Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh sebagai berikut

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Lakukan proses eliminaisi sehingga kolom pertama dibawah diagonal utama bernilai nol dengan OBE yang digunakan antara lain

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ b_2 - \frac{1}{2} b_1 \to b_2 \\ b_3 - 2b_1 \to b_3 \end{matrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

Misalkan M_1 didefinisikan sebagai matriks identitas dengan kolom pertama yang bernilai 0 akan diisikan oleh koefisien dari kelipatan baris lain sehingga membentuk $m_{21}\ dan\ m_{31}$ sedangkan entri lainnya diabaikan/tidak ada perubahan. Dengan kata lain, bentuk M_1 adalah:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, jika kalikan M_1 dengan A akan menjadi

$$M_1 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+0+0 & 4+0+0 & -2+0+0 \\ -1+1+0 & -2-1+0 & 1+5+0 \\ -4+0+4 & -8+0+1 & 4+0-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} = A_1$$

Disini terlihat bahwa $M_1 A = A_1$. Sekarang lakukan hal yang sama (membuat nol) menggunakan OBE pada kolom kedua dibawah diagonal utama pada matriks A_1.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} b_3 - \frac{7}{3} b_2 \to b_3$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Berikutnya memisalkan M_2 sebagai matriks identitas dengan kolom kedua yang bernilai 0 akan diisikan oleh koefisien dari kelipatan baris lain sehingga membentuk m_{32} sedangkan entri lainnya diabaikan/tidak ada perubahan. Akibatnya, bentuk M_2 menjadi seperti:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Kemudian, jika M_2 dikalikan dengan A_1 akan menjadi

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, dapat dikatakan $M_2A_1 = A_2$, apabila dari uraian di atas akan ditarik kesimpulannya menjadi

$$M_2A_1 = A_2 \Rightarrow M_2(M_1A) = A_2 \qquad \textbf{[i]}$$

Berikutnya M_1^{-1} adalah inverse matriks dari M_1 dan M_2^{-1} adalah invers matriks dari M_2. Sehingga jika dilihat dalam bentuk matematikanya seperti

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

berdasarkan persamaan 16 didapat

$$A = IxIxA$$

$$A = M_1^{-1}M_1M_2^{-1}M_2A$$

$$A = M_1^{-1}M_2^{-1}(M_2M_1A)$$

$$A = M_1^{-1}M_2^{-1}A_2 \qquad \textbf{[ii]}$$

Dari contoh di atas M_2 dan M_1 membentuk matriks segitiga bawah sehingga inverse dari M_2 dan M_1 yaitu M_1^{-1} dan M_2^{-1} juga membentuk matriks segitiga bawah, dan A_2 membentuk matriks segitiga atas. Selanjutnya, pada definisi Dekomposisi LU matriks L ditunjukan pada matriks segitiga bawah sedangkan matriks U ditunjukan pada matriks segitiga atas. Kemudian kaitannya antara definisi dengan persamaan [ii] yaitu jika $M_1^{-1}M_2^{-1}$ adalah matriks segitiga bawah maka dalam Dekomposisi LU matriks ini disebut matriks L dan A_2 pada persamaan [i] adalah matriks segitiga atas dalam Dekomposisi LU matriks ini disebut matriks U atau dapat ditulis

$$A = LU$$

Dari pembuktian di atas sejalan dengan definisi yang diberikan oleh Indrayani (2010, hal. 15) yaitu algoritma gauss sederhana yang diterapkan pada A dapat memfaktorkan A menjadi hasil kali matriks diagonal bawah dan matriks diagonal atas. Selanjutnya, jika suatu matriks dapat dibentuk menjadi matriks L dan U maka matriks tersebut juga dapat diterapkan pada pemecahan spl, seperti yang diungkapkan Anton (1987, hal. 350) bahwa jika matriks A berukuran *nxn* dapat difaktorkan menjadi $A = LU$, maka sistem persamaan linear $Ax = b$ dapat diselesaikan.

Disamping itu, seperti yang diketahui metode spl yang dapat diterapkan sangatlah banyak antara lain: eliminasi, substitusi, determinan, konsep OBE seperti eliminasi gauss dan gauss jordan, dekomposisi, iterasi, invers, dkk. Akan tetapi dari sekian banyaknya metode yang dipakai pada spl bilangan kompleks barulah sedikit, terkait metode yang sering atau sudah digunakan oleh peneliti terdahulu diantaranya metode dekomposisi nilai singular, metode gauss-jordan, gauss-seidel dan jacobian. Sehingga pada kesempatan kali ini, peneliti juga ikut tertarik ingin membahas mengenai spl kompleks mengunakan metode Dekomposisi LU.

2. PEMECAHAN SPL KOMPLEKS MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI LU

Karena jenis penelitian yang diterapkan dalam artikel ini merupakan studi literatur, sehingga terkait pembahasannya nanti akan berupa soal dan pemecahannya dari spl kompleks ini dengan langkah-langkah yang digunakan seperti berikut:

1. Diberikan sistem persamaan linear bilangan kompleks sebanyak 2 soal
2. Untuk soal pertama, bentuk $Ax = g$
3. Gunakan OBE pada matriks A sehingga membentuk matriks segitiga atas
4. Setiap pengoperasian pada matriks A akan diampirkan pengerjaan manualnya
5. Pengali suatu baris akan disimpan pada matriks L
6. Membentuk $LUx = b$
7. Memisalkan $Ux = y \Longrightarrow Ly = b$
8. Gunakan substitusi maju untuk memperoeh y
9. Gunakan substitusi mundur pada $Ux = y$ untuk memperoleh x
10. Untuk soal ke 2 lakukan langkah $2 - 9$

Untuk soal 1 diberikan persamaan sebagai berikut

$$2x + 3y + 4z = 17 + 12i$$

$$x + 4y + 2z \;\; = 11 + 11i$$

$$3x + 6y + 5z = 24 + 20i$$

Jawab

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 + 12i \\ 11 + 11i \\ 24 + 20i \end{bmatrix} \quad \textbf{[5]}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 - \frac{1}{2} b_1 \to b_2 \\ b_3 - \frac{3}{2} b_1 \to b_3 \end{matrix} \quad \textbf{[6]}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} \quad \textbf{[7]}$$

Adapun proses perhitungan Operasi pada baris 2 dari persamaan [6]

$$a_{21} \to 1 - \left(\frac{1}{2}\right) 2 = 1 - 1 = 0$$

$$a_{22} \to 4 - \left(\frac{1}{2}\right)3 = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$a_{23} \to 2 - \left(\frac{1}{2}\right)4 = 2 - 2 = 0$$

Operasi pada baris 3 dari persamaan [6]

$$a_{31} \to 3 - \left(\frac{3}{2}\right)2 = 3 - 3 = 0$$

$$a_{32} \to 6 - \left(\frac{3}{2}\right)3 = \frac{12-9}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_{33} \to 5 - \left(\frac{3}{2}\right)4 = 5 - 6 = -1$$

Sedangkan untuk pengali suatu baris tersebut akan ditempatkan ke matriks L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{8}]$$

Selanjutnya operasikan kembali persamaan [7]

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} b_3 - \frac{6}{10} b_2 \to b_3 \qquad \textbf{[9]}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[10]}$$

Adapun proses perhitungan Operasi pada baris 3 dari persamaan [9]

$$a_{32} \to \frac{3}{2} - \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$a_{33} \to -1 - \left(\frac{6}{10}\right)0 = -1$$

Untuk pengali simpan ke matriks L pada persamaan [8]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{6}{10} & 1 \end{bmatrix} \qquad \textbf{[11]}$$

Jadi karena $A = LU$ maka persamaan [5],[10],[11] akan berubah menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{6}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 + 12i \\ 11 + 11i \\ 24 + 20i \end{bmatrix}$$

Subtitusi maju

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{6}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17+12i \\ 11+11i \\ 24+20i \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 17 + 12i$$

$$\frac{1}{2}y_1 + y_2 = 11 + 11i$$

$$\frac{3}{2}y_1 + \frac{6}{10}y_2 + y_3 = 24 + 20i$$

Menentukan y_2

$$\frac{1}{2}(17 + 12i) + y_2 = 11 + 11i$$

$$y_2 = \left(\frac{22 + 22i}{2}\right) - \left(\frac{17 + 12i}{2}\right) = \frac{5 + 10i}{2}$$

Menentukan y_3

$$\frac{3}{2}y_1 + \frac{6}{10}y_2 + y_3 = 24 + 20i$$

$$\frac{3}{2}(17 + 12i) + \frac{6}{10}\left(\frac{5 + 10i}{2}\right) + y_3 = 24 + 20i$$

$$\frac{(51 + 36i)}{2} + \left(\frac{3 + 6i}{2}\right) + y_3 = 24 + 20i$$

$$y_3 = -\frac{(54 + 42i)}{2} + 24 + 20i$$

$$y_3 = (24 - 27) + (20 - 21)i = -3 - i$$

Gunakan substitusi mundur

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17+12i \\ \frac{5+10i}{2} \\ -3-i \end{bmatrix}$$

$$-z = -3 - i \implies z = 3 + i$$

$$\frac{5}{2}y = \frac{5 + 10i}{2} \implies y = 1 + 2i$$

$$2x + 3y + 4z = 17 + 12i$$

$$2x + 3(1 + 2i) + 4(3 + i) = 17 + 12i$$

$$2x + 3 + 6i + 12 + 4i = 17 + 12i$$

$$2x = 17 - 15 + 12i - 10i$$

$$x = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

Sehingga didapat nilai x, y, z

$x = 1 + i, y = 1 + 2i, z = 3 + i$ **[12]**

Pada sistem persamaan linear dikatakan solusi penyelesaian jika dan hanya jika memenuhi soal 1, maka akan ditunjukan:

$$2x + 3y + 4z = 17 + 12i$$

$$2(1 + i) + 3(1 + 2i) + 4(3 + i) = 17 + 12i$$

$$(2 + 3 + 12) + (2i + 6i + 4i) = 17 + 12i$$

$$x + 4y + 2z = 11 + 11i$$

$$(1 + i) + 4(1 + 2i) + 2(3 + i) = 11 + 11i$$

$$(1 + 4 + 6) + (i + 8i + 2i) = 11 + 11i$$

$$3x + 6y + 5z = 24 + 20i$$

$$3(1 + i) + 6(1 + 2i) + 5(3 + i) = 24 + 20i$$

$$(3 + 6 + 15) + (3i + 12i + 5i) = 24 + 20i$$

Karena persamaan [12] terbukti memenuhi soal 1. Jadi dapat dikatakan persamaan [12] adalah solusi penyelesaiannya

Untuk soal 2 diberikan persamaan sebagai berikut

$$(1 + i)x + (1 + 3i)y + (2 - 4i)z = 7 + 7i$$

$$(2i)x + (1 - i)y + (1 + 3i)z = 4 + 4i$$

$$2x + (2 + 4i)y + (-2 - 2i)z = 8 + 10i$$

Jawab

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 2i & 1-i & 1+3i \\ 2 & 2+4i & -2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+7i \\ 4+4i \\ 8+10i \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{13}]$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 2i & 1-i & 1+3i \\ 2 & 2+4i & -2-2i \end{bmatrix} \begin{matrix} b_2 - \dfrac{2i}{1+i} b_1 \to b_2 \\ b_3 - \dfrac{2}{1+i} b_1 \to b_3 \end{matrix} \qquad [\mathbf{14}]$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 0 & 3-5i & -5+5i \\ 0 & -2+2i & 4i \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{15}]$$

Adapun proses perhitungan Operasi pada baris 2 dari persamaan [14]

$$a_{21} \to 2i - \left(\frac{2i}{1+i}\right) 1 + i \quad \Rightarrow 2i - \left(\frac{2i-2}{1+i}\right)$$

$$= 2i - \left(\frac{2i-2}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = 2i - \left(\frac{2i+2-2+2i}{1^2+1^2}\right)$$

$$= 2i - \left(\frac{4i}{2}\right) = 2i - 2i = 0$$

$$a_{22} \rightarrow (1-i) - \left(\frac{2i}{1+i}\right)1+3i \quad \Longrightarrow (1-i) - \left(\frac{2i-6}{1+i}\right)$$
$$= (1-i) - \left(\frac{2i-6}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = (1-i) - \left(\frac{2i+2-6+6i}{1^2+1^2}\right)$$
$$= (1-i) - \left(\frac{8i-4}{2}\right)$$
$$= (1-i) - (4i-2) = 3-5i$$
$$a_{23} \rightarrow 1+3i - \left(\frac{2i}{1+i}\right)2-4i \Longrightarrow 1+3i - \left(\frac{4i+8}{1+i}\right)$$
$$= 1+3i - \left(\frac{4i+8}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = 1+3i - \left(\frac{4i+4+8-8i}{1^2+1^2}\right)$$
$$= 1+3i - \left(\frac{12-4i}{2}\right)$$
$$= 1+3i - (6-2i) = -5+5i$$

Operasi pada baris 3 dari persamaan [14]

$$a_{31} \rightarrow 2 - \left(\frac{2}{1+i}\right)1+i \qquad \Longrightarrow 2 - \left(\frac{2+2i}{1+i}\right)$$
$$= 2 - \left(\frac{2+2i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = 2 - \left(\frac{2-2i+2i+2}{1^2+1^2}\right)$$
$$= 2 - \left(\frac{4}{2}\right) = 2-2 = 0$$
$$a_{32} \rightarrow 2+4i - \left(\frac{2}{1+i}\right)1+3i \Longrightarrow 2+4i - \left(\frac{2+6i}{1+i}\right)$$
$$= 2+4i - \left(\frac{2+6i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = 2+4i - \left(\frac{2-2i+6i+6}{1^2+1^2}\right)$$
$$= 2+4i - \left(\frac{8+4i}{2}\right)$$
$$= 2+4i - (4+2i) = -2+2i$$
$$a_{33} \rightarrow -2-2i - \left(\frac{2}{1+i}\right)2-4i \quad \Longrightarrow -2-2i - \left(\frac{4-8i}{1+i}\right)$$
$$= -2-2i - \left(\frac{4-8i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) = -2-2i - \left(\frac{4-4i-8i-8}{1^2+1^2}\right)$$
$$= -2-2i - \left(\frac{-12i-4}{2}\right)$$
$$= -2-2i - (-6i-2) = 4i$$

Sedangkan untuk pengali suatu baris tersebut akan ditempatkan ke matriks L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2i}{1+i} & 1 & 0 \\ \dfrac{2}{1+i} & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{16}]$$

Selanjutnya operasikan kembali persamaan [15]

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 0 & 3-5i & -5+5i \\ 0 & -2+2i & \dfrac{-50+98i}{17} \end{bmatrix} b_3 - \frac{-2+2i}{3-5i} b_2 \to b_3 \qquad [\mathbf{17}]$$

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 0 & 3-5i & -5+5i \\ 0 & 0 & \dfrac{-50+98i}{17} \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{18}]$$

Adapun proses perhitungan Operasi pada baris 3 dari persamaan [17]

$$a_{32} \to -2+2i - \left(\frac{-2+2i}{3-5i}\right) 3-5i$$

$$= -2+2i - \left(\frac{-6+6i+10i+10}{3-5i}\right)$$

$$= -2+2i - \left(\frac{4+16i}{3-5i}\right) \qquad \Rightarrow -2+2i - \left(\frac{4+16i}{3-5i}\right)\left(\frac{3+5i}{3+5i}\right)$$

$$= -2+2i - \left(\frac{12+20i+48i-80}{3^2+5^2}\right) = -2+2i - \left(\frac{68+68i}{34}\right)$$

$$= -2+2i - (2+2i) = 0$$

$$a_{33} \to 4i - \left(\frac{-2+2i}{3-5i}\right) - 5+5i$$

$$= 4i - \left(\frac{10-10i-10i-10}{3-5}\right)$$

$$= 4i - \left(\frac{-20i}{3-5i}\right) \qquad \Rightarrow 4i - \left(\frac{-20i}{3-5i}\right)\left(\frac{3+5i}{3+5i}\right)$$

$$= 4i - \left(\frac{-60i+100}{3^2+5^2}\right) \qquad = 4i - \left(\frac{-60i+100}{34}\right)$$

$$= \left(\frac{68i}{17}\right) - \left(\frac{-30i+50}{17}\right) = \left(\frac{98i-50}{17}\right)$$

Untuk pengali simpan ke matriks L pada persamaan [16]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{2i}{1+i} & 1 & 0 \\ \dfrac{2}{1+i} & \dfrac{-2+2i}{3-5i} & 1 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{19}]$$

Jadi karena $A = LU$ maka persamaan [13],[18],[19] akan berubah menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2i}{1+i} & 1 & 0 \\ \frac{2}{1+i} & \frac{-2+2i}{3-5i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 0 & 3-5i & -5+5i \\ 0 & 0 & \frac{98i-50}{17} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+7i \\ 4+4i \\ 8+10i \end{bmatrix}$$

Subtitusi maju

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2i}{1+i} & 1 & 0 \\ \frac{2}{1+i} & \frac{-2+2i}{3-5i} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+7i \\ 4+4i \\ 8+10i \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 7+7i$$

$$\frac{2i}{1+i}y_1 + y_2 = 4+4i$$

$$\frac{2}{1+i}y_1 + \frac{-2+2i}{3-5i}y_2 + y_3 = 8+10i$$

Menentukan y_2

$$\frac{2i}{1+i}y_1 + y_2 = 4+4i$$

$$\frac{2i}{1+i}(7+7i) + y_2 = 4+4i$$

$$y_2 = 4+4i - \frac{14i-14}{1+i}$$

$$y_2 = 4+4i - \left(\frac{14i-14}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right)$$

$$y_2 = 4+4i - \frac{(14i+14-14+14i)}{1^2+1^2}$$

$$y_2 = 4+4i - \frac{28i}{2}$$

$$y_2 = 4+4i-14i = -10i+4$$

Menentukan y_3

$$\frac{2}{1+i}y_1 + \frac{-2+2i}{3-5i}y_2 + y_3 = 8+10i$$

$$\frac{2}{1+i}(7+7i) + \frac{-2+2i}{3-5i}(-10i+4) + y_3 = 8+10i$$

$$\frac{14+14i}{1+i} + \frac{20+8i+20i-8}{3-5i} + y_3 = 8+10i$$

$$\left(\frac{14+14i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right) + \left(\frac{12+28i}{3-5i}\right)\left(\frac{3+5i}{3+5i}\right) + y_3 = 8+10i$$

$$\frac{(14-14i+14i+14)}{1^2+1^2} + \frac{(36+60i+84i-140)}{3^2+5^2} + y_3 = 8+10i$$

$$\frac{(28)}{2}+\frac{(-104+144i)}{34}+y_3=8+10i$$
$$14+\frac{(-52+72i)}{17}+y_3=8+10i$$
$$\frac{(-52+72i)}{17}+y_3=-6+10i$$
$$(-52+72i)+17y_3=-102+170i$$
$$(-52+72i)-(-102+170i)=-17y_3$$
$$50-98i=-17y_3 \Longrightarrow y_3=\frac{-50+98i}{17}$$

Gunakan substitusi mundur

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1+3i & 2-4i \\ 0 & 3-5i & -5+5i \\ 0 & 0 & \frac{98i-50}{17} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7+7i \\ 4-10i \\ \frac{-50+98i}{17} \end{bmatrix}$$

Menentukan z

$$\frac{98i-50}{17}z=\frac{98i-50}{17} \Longrightarrow z=1$$

Menentukan y

$$(3-5i)y+(-5+5i)z=4-10i$$
$$(3-5i)y+(-5+5i)(1)=4-10i$$
$$(3-5i)y=4-10i-(-5+5i)$$
$$(3-5i)y=9-15i \Longrightarrow y=\frac{9-15i}{3-5i}$$
$$y=\left(\frac{9-15i}{3-5i}\right)\left(\frac{3+5i}{3+5i}\right)$$
$$y=\frac{27+45i-45i+75}{3^2+5^2}$$
$$y=\frac{102}{34}=3$$

Menentukan x

$$(1+i)x+(1+3i)y+(2-4i)z=7+7i$$
$$(1+i)x+(1+3i)(3)+(2-4i)(1)=7+7i$$
$$(1+i)x+(3+9i)+(2-4i)=7+7i$$
$$(1+i)x+(5+5i)=7+7i$$
$$(1+i)x=7+7i-(5+5i)$$
$$(1+i)x=2+2i \Longrightarrow x=\frac{2+2i}{(1+i)}$$

$$x = \left(\frac{2+2i}{1+i}\right)\left(\frac{1-i}{1-i}\right)$$
$$x = \frac{2-2i+2i+2}{1^2+1^2} = \frac{4}{2} = 2$$

Sehingga didapat nilai x, y, z

$x = 2, y = 3, z = 1$ **[20]**

Pada sistem persamaan linear dikatakan solusi penyelesaian jika dan hanya jika memenuhi soal 2, maka akan ditunjukan:

$$(1+i)x + (1+3i)y + (2-4i)z = 7+7i$$
$$(1+i)2 + (1+3i)3 + (2-4i)1 = 7+7i$$
$$(2+3+2) + (2i+9i-4i) = 7+7i$$
$$(2i)x + (1-i)y + (1+3i)z = 4+4i$$
$$(2i)2 + (1-i)3 + (1+3i)1 = 4+4i$$
$$(3+1) + (4i-3i+3i) = 4+4i$$
$$2x + (2+4i)y + (-2-2i)z = 8+10i$$
$$(2)2 + (2+4i)3 + (-2-2i)1 = 8+10i$$
$$(4+6-2) + (12i-2i) = 8+10i$$

Karena persamaan [20] terbukti memenuhi soal 2. Jadi dapat dikatakan persamaan [20] adalah solusi penyelesaiannya

3. PENUTUP

Dari penelitian ini peneliti menyimpulkan metode dekomposisi LU dapat dipakai dalam menentukan solusi sistem persamaan linear bilangan kompleks dengan mengambil dua kasus soal sebagai sampel. Adapun saran untuk penelitian selanjutnya dapat menerapkan bilangan kompleks untuk mencari invers matriks menggunkan metode gauss-jordan.

UCAPAN TERIMA KASIH

Peneliti mengucapkan banyak terimakasih terutama kepada Allah Swt. karena pertolongannyalah peneliti bisa sampai tahap ini, kemudian kepada dosen pembimbing yang selalu mengarahkan dan mengingatkan atas kekeliruan/kekurangan pada penelitian ini, terakhir kepada semuanya yang telah memberikan suport secara langsung dan atau tak langsung sehingga peneliti menjadi antusias dalam mengerjakan penelitian ini

REFERENSI

Abdullah, R. M., Ismail, K., & Suprawoto, T. (n.d.). Perbandingan Tiga Metode Umun Untuk Memecahkan Persamaan Linear Jarang (Sparse).

Anton, H. (1987). *Aljabar Linear Elementer*. Bandung: Erlangga.

Aryani, F., & Yulianti, D. (2012). Aplikasi Metode Singular Value Decomposition (SVD) Pada Sistem Linear Kompleks. *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri Vol. 10, No. 1*, 67.

Erianti, I. (2013). *Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Menggunakan Metode Dekomposisi QR.* Pekanbaru.

Erman, & Turmudi. (1993). *Perkenalan Dengan Teori Bilangan.* Bandung: Wijayakusumah.

Hasmita, N. (2014). *Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fuzzy Kompleks menggunakan Metode Dekomposisi Doolittle.* Pekanbaru.

Hw, S. (2015). *Analisis Kompleks.* Surakarta: MUP.

Indrayani, N. (2010). *Perbandingan 3 Metode Untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear.* Sumatra Utara.

j, s. (2015, November 21). Retrieved from Kompasiana: https://www.kompasiana.com/sri_j/56502894d693736305e72f6f/sejarah-matematika-dunia

Kartika, E. D. (2018). *Aljabar Linear.*

Munir, R. (n.d.). Dekomposisi LU. In *Topik Khusus Informatika 1* (p. 42).

Sahid. (2004). Sistem Persamaan Linear. In S. Sahid, *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab.* Yogyakarta.

Sari, D. I. (2012). *Aljabar Linear Elementer.*

Sr, D. F., Triono, E., & Anapranata, H. (2019). Implementasi Metode Eliminasi Gauss pada Sistem Informasi Investasi Emas menggunakan Octave. *Jurnal Informatika Poinema*.

Yusnita, A. F., & Novtiar, C. (2017). *Aljabar Linear.* Bandung.